Conforme aux nouveaux programme du ministère de l'éducation nationale de la formation professionnelle de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

EL HAJJAJI MATHS

- EXERCICES D'ENTRAINEMENT
- EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT
- LES METHODES PAS A PAS
- CORRIGES DETAILLES ET EXPLIQUES



2EME ANNEE BACCALAUREAT
SCIENCES EXPERIMENTALES (PC. SVT. ...)

Si $a>0$ et $b>0$
Alors
$\ln ab = \ln a + \ln b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
$\ln a^r = r \ln a \; ; \; r \in \mathbb{Q}$
$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
$\ln e = 1$
$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \ln e^x = x$

TOME 1

LA CONTINUITE

Ecrit et réalisé par : Prof: EL BACHIR EL HAJJAJI

الأستاذ: البشير الحجّاجي



استاذ التعليم الثانوي التأهيلي
بثانوية المسيرة الخضراء التأهيلية
المديرية الإقليمية تيزنيت .

شكر خاص

الشكر الموصول لكلٍّ من:

- الأستاذ: إبراهيم الحجّاجي ، أخي الأكبر وصاحب الفضل الكبير
- السيد : إبراهيم إضرضار ، المدير الاقليمي بالمديرية الإقليمية تيزنيت ، على دعمه المتواصل
- السيد: حسن بوليد ، مفتش مادة الرياضيات بالمديرية الإقليمية تيزنيت

نسألكم الدعاء

مُقدّمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على مولانا رسول الله.
تزامنا مع بداية الدخول المدرسي 2020-2021، والذي يتسم بظروف خاصة، أهدي لتلامذة السنة الثانية بكالوريا علوم تجريبية، بجميع مسالكها هذا العمل المتواضع الذي يحتوي على تمارين محلولة، وكذا تمارين للبحث. راجيا من العلي القدير أن لا تنسونا من خالص دعائكم.

بخط البشير الحجاجي
أستاذ مادة الرياضيات
الثانوية التأهيلية المسيرة الخضراء
المديرية الإقليمية تيزنيت

نسألكم الدعاء

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \ ; \ x \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

CORRECTION

Il suffit de vérifier que : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x-3)$$

$$= -2$$

Or $f(1) = -2$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en $x_0 = 1$

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ici, si on remplace x par 1, on trouve la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-1)$, puis réduire par $(x-1)$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+4x-4} \ ; \ x \neq -2 \\ f(-2) = \dfrac{5}{8} \end{cases}$

1- Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

2- Montrer que f est continue en $x_0 = -2$

CORRECTION

1- Déterminons D_f

$x \in D_f \Leftrightarrow (3x^2+4x-4 \neq 0 \text{ et } x \neq -2) \text{ ou } x = -2$

Soit le trinôme : $3x^2+4x-4$

Son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 64$

On a : $\Delta > 0$

Donc le trinôme $3x^2+4x-4$ admet deux racines $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = -2$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+4x-4} \ ; \ x \neq -2 \\ f(-2) = \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

$3x^2+4x-4 \neq 0$ et $x \neq -2$

ou $x = -2$

Donc, on aura :

$x \in D_f \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{2}{3} \text{ et } x \neq -2 \text{ et } x \neq -2\right)$ ou $x = -2$

$\Leftrightarrow \left(x \neq \frac{2}{3} \text{ et } x \neq -2\right)$ ou $x = -2$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$

D'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} = \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$

> f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2 - Montrons que f est continue en $x_0 = -2$

Il suffit de vérifier que : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 4}$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(3x-2)}$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{2x-1}{3x-2}$$
$$= \frac{5}{8}$$

> Ici, si on remplace x par -2 on trouve la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x+2)$, puis réduire par $(x+2)$

Or $f(-2) = \frac{5}{8}$

Et puisque $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

Alors f est continue en $x_0 = -2$

> Si $x_0 \neq 0$ est une racine de $ax^2 + bx + c$, alors $ax^2 + bx + c = (x - x_0)\left(ax - \frac{c}{x_0}\right)$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x^2 - x + 3}{2x^3 - 5x + 3} ; x_0 \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

CORRECTION

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 5x^2 - x + 3}{2x^3 - 5x + 3}$$

Factorisons $3x^3 - 5x^2 - x + 3$ par $(x-1)$

Autrement dit ; cherchons le polynôme $Q(x)$ de degré 2 tel que

$3x^3 - 5x^2 - x + 3 = (x-1)Q(x)$

> il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-1)$, puis réduire par $(x-1)$
>
> Pour factoriser les polynômes de degré superieur ou égal à 3, je préfère le tableau d'Hörner

Remarque

Vous pouvez voir cette méthode sur youtube

Les coefficients de $3x^3-5x^2-x+3$	3	-5	-1	3
La racine 1		3	-2	-3
Les coefficients de $Q(x)$	3	-2	-3	0

$3x^3-5x^2-x+3=(x-1)(3x^2-2x-3)$

De la même manière, on va factoriser : $2x^3-5x+3$ par $(x-1)$

(Remarquons que : $2x^3-5x+3=2x^3+0x-5x+3$)

Les coefficients de $2x^3+0x-5x+3$	2	0	-5	3
La racine 1		2	2	-3
Les coefficients de $Q(x)$	2	2	-3	0

Donc : $2x^3-5x+3=(x-1)(2x^2+2x-3)$

On aura donc : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(3x^2-2x-3)}{(x-1)(2x^2+2x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-3}{2x^2+2x-3}$

$=-2$

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

Alors f est continue en $x_0=1$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}\ ;\ x<2 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}\ ;\ x>2 \\ f(2)=\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

1- Déterminer D_f, le domaine de définition de f

2- Montrer que f est continue en $x_0=2$

3- Étudier la continuité de f sur D_f.

CORRECTION

1 ~ Déterminons D_f

Notons : $\begin{cases} f_1(x) = f(x) ;\ x<2 \\ f_2(x) = f(x) ;\ x>2 \end{cases}$

On aura donc : $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \{2\}$

Donc ; il faut déterminer D_{f_1} et D_{f_2}

> Ici, f est définie par deux formules et l'image de 2.
> 2 est donc forcement appartient à D_f

- $x \in D_{f_1} \Longleftrightarrow x^2-x-2 \neq 0$ et $x<2$

> $f_1(x) = \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} ;\ x<2$ → $x^2-x-2 \neq 0$ et $x<2$

On considère le trinôme : x^2-x-2

Son discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 9$

Donc le trinôme : x^2-x-2 possède deux racines distinctes :

$x_1 = 2$ et $x_2 = -1$

Donc, on aura :

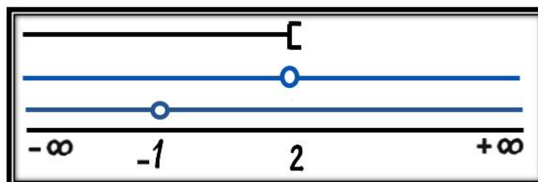
$x \in D_{f_1} \Longleftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 2$ et $x<2$

> Si $x \neq 2$ et $x<2$
> Alors $x<2$

$\Longleftrightarrow x \in \left(]-\infty ;-1[\cup]-1;+\infty[\right) \cap \left(]-\infty ;2[\cup]2;+\infty[\right) \cap \left(]-\infty ;2[\right)$

$\Longleftrightarrow x \in]-\infty ;-1[\cup]-1;2[$

$\Longleftrightarrow x \in]-\infty ;-1[\cup]-1;2[$



Donc : $\boxed{D_{f_1} =]-\infty ;-1[\cup]-1;2[}$

- $x \in D_{f_2} \Longleftrightarrow x^2+5 \geqslant 0$ et $x+2 \geqslant 0$ et $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$ et $x>2$

$\Longleftrightarrow x^2 \geqslant -5$ et $x \geqslant -2$ et $\sqrt{x+2} \neq 2$ et $x>2$

$\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \geqslant -2$ et $x+2 \neq 4$ et $x>2$

$\Longleftrightarrow x \geqslant -2$ et $x \neq 2$ et $x>2$

$\Longleftrightarrow x>2$

> $x^2 \geqslant -5$ est toujours vraie.

> $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} ;\ x>2$ → $x^2+5 \geqslant 0$; $x+2 \geqslant 0$; $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$; $x>2$

Donc : $\boxed{D_{f_2} =]2;+\infty[}$

Et : $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \{2\}$

$=]-\infty ;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[\cup \{2\}$

D'où : $\boxed{D_f =]-\infty ;-1[\cup]-1;+\infty[}$

2 ~ La continuité de f en $x_0 = 2$

- La continuité de f en $x_0 = 2$ à gauche

Vérifions si : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = f(2)$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{3x+2}{x+1}$$
$$= \frac{8}{3}$$

On a bien : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = f(2)$

Donc f est continue en $x_0 = 2$ à gauche

> f est continue en x_0 à gauche si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

> Ici, si on remplace x par 2 on trouve la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-2)$, puis réduire par $(x-2)$

La continuité de f en $x_0 = 2$ à droite

Vérifions si : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = f(2)$

> f est continue en x_0 à droite si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(\sqrt{x^2+5}^{\,2}-3^2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}^{\,2}-2^2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+5-9}{x+2-4} \times \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} \times \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \times \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} (x+2) \times \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= 4 \times \frac{4}{6}$$
$$= \frac{8}{3}$$

> Dans ce cas, il faut penser à multiplier le numérateur par son conjugué $(\sqrt{x^2+5}+3)$ et de multiplier le dénominateur par son conjugué $(\sqrt{x+2}+2)$ (Pour tuer la racine), puis on factorise par $(x-2)$

Conclusion

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = f(2)$

Donc : f est continue en $x_0 = 2$

> Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$
> Alors f est continue en x_0

3. La continuité de f sur D_f

> Ici, il suffit d'appliquer les propriétés de la continuité d'une fonction sur un intervalle

La continuité de f sur D_{f_1}

On a : $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ est continue sur les deux intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;2[$ Comme étant la restriction d'une fraction rationnelle

La continuité de f sur l'intervalle $]2;+\infty[$

On a : $x \mapsto x^2+5$ est continue sur $]2;+\infty[$ Comme étant polynôme

Et : $\forall x \in]2;+\infty[; x^2+5 \geq 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $]2;+\infty[$

Et : $x \mapsto -3$ continue sur $]2;+\infty[$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2+5}-3$ est continue sur $]2;+\infty[$

> Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
> Et $(\forall x \in I) ; u(x) \geq 0$
> Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

De la même manière, on montre que : $x \mapsto \sqrt{x+2}-2$ est continue sur $]2;+\infty[$

Et puisque : $\forall x \in]2;+\infty[; \sqrt{x+2}-2 \neq 0$

Alors : $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

est continue sur $]2;+\infty[$

> Si u et v sont deux fonctions continues sur l'intervalle I
> avec $(\forall x \in I) ; v(x) \neq 0$
> Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est continue sur I.

Conclusion

On a f est continue sur $D_f \setminus \{2\}$

Et puisque f est continue en $x_0 = 2$

Alors f est continue sur D_f

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-1}{x^2} \; ; \; x>0 \\ f(x)=\dfrac{\cos(x)-1}{x}+a \; ; \; x<0 \\ f(0)=b \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit continue en $x_0=0$
2. On suppose que $a=b=\frac{1}{2}$
   Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

Si on remplace x par 0, on trouve la forme "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}-1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}^2-1^2}{x^2\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sin^2(x)-1}{x^2\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1\right)}$$
$$=1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$



$\frac{0}{0}$ et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

Remarquons bien que $\left(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1\right)$ ne pose aucun problème (Il tend vers 2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)-1}{x}+a$$
$$=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1-\cos(x)}{x.x}.x+a$$
$$=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1-\cos(x)}{x^2}.x+a$$
$$=-\frac{1}{2}\times 0+a$$
$$=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

Et on a : $f(0)=b$

Donc f est continue en $x_0=0$ si et seulement si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

D'où : $a = b = \frac{1}{2}$

2 - La continuité de f sur $\mathbb{R}$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $x \mapsto 1+\sin^2(x)$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

et $\forall x \in]0;+\infty[$; $1+\sin^2(x) \geq 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(x)}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Et : $x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(x)}-1$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Et puisque : $x \mapsto x^2$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Et : $\forall x \in]0;+\infty[$; $x^2 \neq 0$

Alors : $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-1}{x^2}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

> Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
> Et $(\forall x \in I)$; $u(x) \geq 0$
> Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

Sur l'intervalle $]-\infty;0[$

On a : $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Et : $x \mapsto -1$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Donc : $x \mapsto \cos(x)-1$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Et puisque : $x \mapsto x$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Et : $\forall x \in]-\infty;0[$; $x \neq 0$

Alors : $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Et : $x \mapsto -1$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Donc : $x \mapsto \cos(x)-1$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

> Si u et v sont deux fonctions continues sur l'intervalle I
> avec $(\forall x \in I)$; $v(x) \neq 0$
> Alors la fonction $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est continue sur I.

Et puisque : $x \mapsto x$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Et : $\forall x \in]-\infty;0[$; $x \neq 0$

Alors : $x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Donc : $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x} + \frac{1}{2}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Et comme f est continue en $x_0=0$
Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \; ; \; x<0 \\ f(x)=\frac{1-x+\sin(x)-\cos(x)}{x} \; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $x_0=0$

CORRECTION

Calculons $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si on remplace, on trouve "$0.\cos(\infty)$" Mais $\cos(\infty)$ n'existe pas. Dans ce cas, il faut penser immédiatement à l'encadrement.

1ère méthode

On sait que : $\forall x\in]-\infty;0[\; ; \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant 1$

$(\forall t\in\mathbb{R})\; ; \; -1\leqslant \cos t\leqslant 1$ ou encore $(\forall t\in\mathbb{R})\; ; \; |\cos t|\leqslant 1$

Donc : $\forall x\in]-\infty;0[\; ; \; |x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant |x|$ $\quad |x|>0$

Donc : $\forall x\in]-\infty;0[\; ; \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant |x|$

Donc : $\forall x\in]-\infty;0[\; ; \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0\right|\leqslant |x|$

Et puisque : $\lim_{x\to 0^-}|x|=0$

Alors : $\lim_{x\to 0^-} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Et par suite : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

Si $\forall x\in]x_0-\varepsilon ; x_0+\varepsilon[$ avec $\varepsilon>0$
$|f(x)-\ell|<h(x)$ et $\lim_{x\to x_0} h(x)=0$
Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

2ème méthode

On sait que : $\forall x\in]-\infty;0[\; ; \; -1\leqslant\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant 1$

On va multiplier par x avec $x<0$

Donc : $\forall x\in]-\infty;0[\; ; \; x\leqslant x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant -x$

or : $\lim_{x\to 0^-} x=\lim_{x\to 0^-} -x=0$

Donc : $\lim_{x\to 0^-} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Et par suite : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

Si $a\leqslant b$ et $c\geqslant 0$
Alors $ac\leqslant bc$

Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant 0$
Alors $ac\geqslant bc$

Si $\forall x\in]x_0-\varepsilon ; x_0+\varepsilon[$ avec $\varepsilon>0$
$g(x)<f(x)<h(x)$
et $\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell$
Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

Calculons $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - x + \sin(x) - \cos(x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{x}{x} + \frac{\sin(x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} - 1 + \frac{\sin(x)}{x}$$
$$= 0 \times \frac{1}{2} - 1 + 1$$
$$= 0$$

On a donc : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où : f est continue en $x_0 = 0$

Si on remplace x par 0, on va trouver la forme "$\frac{0}{0}$".
Mais $\begin{cases} 1-\cos(x) \to 0 \\ \sin(x) \to 0 \\ x \to 0 \end{cases}$
Donc, ça sera mieux de les séparées.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 8

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x$
2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3-1} - 2x$
3. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$
4. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-x-1} - 2x + 1$

CORRECTION

1.
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} |x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2\right)$$
$$= -\infty$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$
$\sqrt{x^2-1} - 2x$
Et puisque $\sqrt{x^2} \neq 2x$
alors, il suffit de factoriser.

2.
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3-1} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x \sqrt{1-\frac{1}{x^3}} - 2x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^3}} - 2\right)$$
$$= -\infty$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$
$\sqrt[3]{x^3-1} - 2x$
Et puisque $\sqrt[3]{x^3} \neq 2x$
alors, il suffit de factoriser.

3 ∼ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$=0$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$

$\sqrt{x^2-1}-x$

Et puisque $\sqrt{x^2}=x$

Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

4 ∼ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x-1}-2x+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-x-1}-2x)(\sqrt{4x^2-x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-x-1}+2x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x-1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-x-1}+2x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-x-1}+2x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+2x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2x}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\right)}+1$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}+1$

$=-\frac{1}{4}+1$

$=\frac{3}{4}$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$

Et puisque $\sqrt{4x^2}=2x$

Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

Remarquer que 1 ne pose aucun problème, c'est pour cela, il faut le laissé loin.

Si on remplace, on va trouver la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ce cas, et la plupart du temps il faut factoriser

لَا إِلَـٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

EXERCICE 9

Calculer les limites suivantes.

1 ∼ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-1}-x$ 2 ∼ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8x^3-x-1}-2x-1$ 3 ∼ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}$

CORRECTION

1 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-1}-x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-1}-x\right)\left(\sqrt[3]{x^3-1}^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2\right)}{\sqrt[3]{x^3-1}^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}^3-x^3}{\sqrt[3]{x^3-1}^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1-x^3}{\sqrt[3]{x^3-1}^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{x^3-1}^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+x^2}$$

$$=0$$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$
Et puisque $\sqrt[3]{x^3}=x$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

2 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{8x^3-x-1}-2x-1$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{8x^3-x-1}\right)^3-(2x)^3}{\left(\sqrt[3]{8x^3-x-1}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3-x-1}+(2x)^2}-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3-x-1-8x^3}{\left(\sqrt{x^3\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3-x-1}+4x^2}-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x^2\sqrt{\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}^2+2x\sqrt[3]{8x^3-x-1}+4x^2}-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(x\sqrt{\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}^2+2\sqrt[3]{8x^3-x-1}+4x^2\right)}-1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{x\sqrt{\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}^2+2\sqrt[3]{8x^3-x-1}+4x}-1$$

$$=-1$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$
Et puisque $\sqrt[3]{8x^3}=2x$
Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

le dénominateur va tendre vers $+\infty$

3 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt[3]{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée $+\infty+(-\infty)$
Et puisque $\sqrt{x}\neq\sqrt[3]{x}$
Alors, on factorise par $x^{\frac{1}{2}}$
dont le plus grand puissance

Bien sûre le gagnant c'est $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - x^{-\frac{1}{6}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$\frac{a}{\infty}=0$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \sqrt[6]{\frac{1}{x}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=+\infty$$

سُبْحَانَكَ اللَّهُمَّ وَبِحَمْدِكَ، أَشْهَدُ أَنْ
لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنْتَ أَسْتَغْفِرُكَ وَأَتُوبُ إِلَيْكَ

EXERCICE 10

Calculer les limites suivantes

1 ~ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}$ 2 ~ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$ 3 ~ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$

CORRECTION

1 ~ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$$

$$=+\infty$$

Ici, bien sûre, c'est $x^{\frac{1}{2}}$ qui va gagner
Donc, il suffit de factoriser par $x^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$

$$a^r+a^{r'}=a^r\left(1+a^{r'-r}\right)$$
$$=a^{r'}\left(a^{r-r'}+1\right)$$

2 ~ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}-1}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Si on remplace, on va trouver $\frac{\infty}{\infty}$
Mais, ici, il y a un combat entre $\sqrt[3]{x}$ et $\sqrt{x}$

On factorise le numérateur par $\sqrt[3]{x}$ et le dénominateur par $\sqrt{x}$

Le gagnant bien sûre est $\sqrt{x}$

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ




كلمتان خفيفتان على اللسان، ثقيلتان في الميزان: سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$= 0$

3 ~ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^6 - 3\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^4 + \left(x^{\frac{1}{12}}\right)^3}{\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^4 - 1}$$

Ici, on peut factoriser le numérateur par $\sqrt{x}$ et le dénominateur par $\sqrt[3]{x}$

ou bien

utiliser la méthode ci-contre.

Posons : $t = x^{\frac{1}{12}}$

Si : $x \to +\infty$

Alors : $t \to +\infty$

Et par suite :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^6 - 3\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^4 + \left(x^{\frac{1}{12}}\right)^3}{\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^4 - 1} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^6 - 3t^4 + t^3}{t^4 - 1}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{t^6}{4}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} t^2$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \infty$ si $n > m$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_m x^{m-n}} = 0$ si $m > n$

$= \frac{a_n}{b_m}$ si $m = n$

D'où : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} = +\infty$

EXERCICE 11

Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant

$\sqrt[12]{13}$; $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{6}$

CORRECTION

On a : $\sqrt[12]{13}=13^{\frac{1}{12}}$; $\sqrt[6]{8}=8^{\frac{1}{6}}$; $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}$

(Remarquons que le dénominateur commun entre $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ est 12)

Donc : $\left((13)^{\frac{1}{12}}\right)^{12}=13$; $\left((8)^{\frac{1}{6}}\right)^{12}=8^2=64$; $\left((5)^{\frac{1}{3}}\right)^{12}=5^4=625$;

$\left((3)^{\frac{1}{2}}\right)^{12}=3^6=729$ et $\left((6)^{\frac{1}{4}}\right)^{12}=6^3=216$

On a : $13<64<216<625<729$

Donc : $\sqrt[12]{13}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

$a>0$

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

EXERCICE 12

Simplifier l'expression suivant $A=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}.\sqrt[4]{8}.\sqrt[3]{32}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}$

CORRECTION

$$A=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}.\sqrt[4]{8}.\sqrt[3]{32}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}$$
$$=\frac{\sqrt[6]{2}.\sqrt[4]{2^3}.\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[8]{2}.\sqrt[12]{2^5}}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{6}}.2^{\frac{3}{4}}.2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{8}}.2^{\frac{5}{12}}}$$
$$=2^{\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{1}{8}-\frac{5}{12}}$$
$$=2^{\frac{49}{24}}$$
$$=\sqrt[49]{2^{24}}$$

$a>0$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad$ $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}$ $\quad$ $(a^r)^{r'}=a^{r.r'}$

$\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ $\quad$ $\frac{1}{a^r}=a^{-r}$

EXERCICE 13

Calculer les limites suivantes

1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{5x+3}-2}{\sqrt{3x+1}-2}$ $\quad$ 2 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x+2}-2}{x+2}$ $\quad$ 3 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

CORRECTION

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{5x+3}-2}{\sqrt{3x+1}-2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{5x+3}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+2^2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+2^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^3-2^3\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-2^2\right)\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x+3-8)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{(3x+1-4)\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x-5)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{(3x-3)\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3\left(\left(\sqrt[3]{5x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}$

$=\dfrac{5\times 4}{3\times 12}$

$=\dfrac{5}{9}$

La forme indéterminer "$\frac{0}{0}$" et la racine

La plupart du temps, on pense à multiplier par le conjugué.

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x+2}-2}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+x+2}\right)^3-2^3}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+x+2}+2^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+x+2-8}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+x+2}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+x-6}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+x+2}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+x+2}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2x-3)}{\left(\sqrt[3]{2x^2+x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+x+2}+4}$

$=-\dfrac{7}{12}$

La forme indéterminer "$\frac{0}{0}$" et la racine

La plupart du temps, on pense à multiplier par le conjugué.

$a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

3 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}^2)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt[3]{x}^3-\sqrt[3]{a}^3)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}^2)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}^2)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}^2)}$

$=\dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a}^2}$

On multiple le numérateur par son conjugué et le dénominateur par son conjugué.

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$\sqrt[3]{x}^3=x$ $\quad$ $\sqrt{x}^2=x$

EXERCICE 14

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x}$ $\quad$ 2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[4]{x}-1)^2}$

CORRECTION

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-1+1-\sqrt{1+\sin x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}$

On a $\begin{cases}\sqrt[3]{1+\tan x}\to 1\\ \sqrt{1+\sin x}\to 1\end{cases}$

Donc, il faut soustrire puis ajouter 1 et séparer les limites

☞ Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\tan x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)\left((\sqrt[3]{1+\tan x})^2+1\sqrt[3]{1+\tan x}+1^2\right)}{x\left((\sqrt[3]{1+\tan x})^2+1\sqrt[3]{1+\tan x}+1^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x})^3-1^3}{x\left((\sqrt[3]{1+\tan x})^2+\sqrt[3]{1+\tan x}+1^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\tan x-1}{x\left((\sqrt[3]{1+\tan x})^2+\sqrt[3]{1+\tan x}+1^2\right)}$

Dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$a=\sqrt[3]{1+\tan x}$
$b=1$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+\tan x}\right)^2+\sqrt[3]{1+\tan x}+1^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+\tan x}\right)^2+\sqrt[3]{1+\tan x}+1^2\right)}$$

$$= 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

☛ Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+\sin x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{1+\sin x})}{x(1+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1^2-(\sqrt{1+\sin x})^2}{x(1+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+\sin x)}{x(1+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{x(1+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{(1+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$= -1 \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$a=1$

$b=\sqrt{1+\sin x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax}=1$

Donc : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

[2] $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[4]{x}-1)^2}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[4]{x}-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}^2+1)}{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}^2+1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{(x-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}^2+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}^2+1)}{(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}\right)^2$$

$$= \frac{16}{9}$$

$a^2-2b+b^2=(a-b)^2$

Dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

EXERCICE 15

1 - Déterminer les deux reéls a et b tels que :
$x^3-3x-18=(x-3)(x^2+ax+b)$

2 - On pose $t=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

a - Vérifier que t est une solution de l'équation :
$x^3-3x-18=0$

rappel $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+3ab(a+b)+b^3$

b - En déduire que $t=3$

CORRECTION

1 - Déterminons a et b

$$x^3-3x-18=(x-3)(x^2+ax+b)$$
$$=x^3+ax^2+bx-3x^2-3ax-3b$$
$$x^3+0x^2-3x-18=x^3+(a-3)x^2+(b-3a)x-b$$

Par identification ; on aura : $\begin{cases}a-3=0\\b-3a=-3\\-3b=-18\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=6\end{cases}$

D'où : $x^3-3x-18=(x-3)(x^2+3x+6)$

2 - a. Vérifions que t est une solution de l'équation : $x^3-3x-18=0$.

Il suffit de vérifier que : $t^3-3t-18=0$.

On a :

$(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$

$$t^3=\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)^3$$
$$=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}^3+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}^3+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$$
$$=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}\times t$$
$$=18+3\sqrt[3]{9^2-(4\sqrt{5})^2}\times t$$

$9^2-(4\sqrt{5})^2=1$

$$t^3=18+3t$$

Donc : $t^3-3t-18=18+3t-3t-18=0$

Et par suite ; t est une solution de l'équation : $x^3-3x-18=0$

b - Déduisons que : $t=3$

Pour cela, il faut résoudre l'équation : $x^3-3x-18=0$

$x^3-3x-18=0 \Longleftrightarrow (x-3)(x^2+3x+6)=0$

$\Longleftrightarrow x-3=0$ ou $x^2+3x+6=0$

$\Longleftrightarrow x=3$ ou $x^2+3x+6=0$

Considérons l'équation : $x^2+3x+6=0$

Son discriminant est : $\Delta=b^2-4ac=3^2-4.1.6=-15$

Puisque : $\Delta<0$

Alors l'équation : $x^2+3x+6=0$ n'admet aucune solution

Donc : $x^3-3x-18=0 \Longleftrightarrow x=3$

C'est-à-dire que la seule solution de l'équation : $x^3-3x-18=0$ est $x=3$

Et puisque t est une solution de l'équation : $x^3-3x-18=0$

Alors : $t=3$

EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $x^4-16=0$ 2) $x^6+3=0$ 3) $x^7-3=0$ 4) $x^7+3=0$

5) $x^8+3x^4-10=0$

CORRECTION

1) $x^4-16=0 \Longleftrightarrow x^4=16$

$\Longleftrightarrow x=\sqrt[4]{16}$ ou $x=-\sqrt[4]{16}$

$\Longleftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

Donc : $S=\{-2;2\}$

> Si $x^{2n}=a$ avec $a>0$
> Alors $x=\sqrt[2n]{a}$ ou $x=-\sqrt[2n]{a}$

2) $x^6+3=0 \Longleftrightarrow x^6=-3$

Equation impossible, le fait que : $x^6\geqslant 0$ et $-3<0$

D'où : $S=\emptyset$

3) $x^7-3=0 \Longleftrightarrow x^7=3$

$\Longleftrightarrow x=\sqrt[7]{3}$

D'où : $S=\{\sqrt[7]{3}\}$

> Si $x^{2n+1}=a$ avec $a>0$
> Alors $x=\sqrt[2n+1]{a}$

4 ~ $x^7+3=0 \Leftrightarrow x^7=-3$

$\Leftrightarrow -x^7=3$

$\Leftrightarrow (-x)^7=3$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[7]{3}$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt[7]{3}$

D'où : $S=\{-\sqrt[7]{3}\}$

Si $x^{2n+1}=a$ avec $a<0$
Alors $x=-\sqrt[2n+1]{-a}$

5 ~ $x^8+3x^4-10=0 \Leftrightarrow (x^4)^2+3x^4-10=0$

On pose : $t=x^4$

L'équation $x^8+3x^4-10=0$ devient :

$t^2+3t-10=0$

$ax^{2n}+bx^n+c=0$
il faut juste effectuer le changement de variable $t=x^n$

Soit donc l'équation : $t^2+3t-10=0$

Son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=3^2-4(1)(-10)=49$

puisque : $\Delta>0$

Alors l'équation $t^2+3t-10=0$ admet deux solutions distinctes :

$t_1=\frac{-3+\sqrt{49}}{2}$ et $t_2=\frac{-3-\sqrt{49}}{2}$

$t_1=2$ et $t_2=-5$

$x^4=-5$ Equation impossible

Or $t=x^4$

Donc : $x^4=2$ ou $x^4=-5$

Donc : $x=\sqrt[4]{2}$ ou $x=-\sqrt[4]{2}$

D'où : $S=\{-\sqrt[4]{2};\sqrt[4]{2}\}$

EXERCICE 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1 ~ $\sqrt[3]{3+x}+\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[3]{6}$ 2 ~ $\sqrt[3]{(2+x)^2}+\sqrt[3]{(2-x)^2}=2\sqrt[3]{4-x^2}$

CORRECTION

1 Déterminons d'abord D_E ; l'ensemble de définition

On pose : (E) : $\sqrt[3]{3+x}+\sqrt[3]{3-x}=\sqrt[3]{6}$

$x \in D_E \iff 3+x \geq 0$ et $3-x \geq 0$

$\iff x \geq -3$ et $x \leq 3$

$\iff -3 \leq x \leq 3$



$\sqrt[n]{u(x)}$ -----------> $u(x) \geq 0$

Donc : $D_E = [-3;3]$

Soit $x \in D_E$

$a = b \iff a^{2n+1} = b^{2n+1}$ ✓

$a = b \not\iff a^{2n} = b^{2n}$

$a = b \Rightarrow a^{2n} = b^{2n}$ ✓

$$(E) \iff \left(\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x}\right)^3 = \sqrt[3]{6}^3$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x}^3 + \sqrt[3]{3-x}^3 + 3\sqrt[3]{3+x}\,\sqrt[3]{3-x}\left(\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x}\right) = 6$$

$$\iff 3+x+3-x+3\sqrt[3]{3+x}\,\sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{6} = 6$$

$$\iff 6+3\sqrt[3]{3+x}\,\sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{6} - 6 = 0$$

$$\iff 3\sqrt[3]{3+x}\,\sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{6} = 0$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x}\,\sqrt[3]{3-x} = 0$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x}\,\sqrt[3]{3-x} = 0$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{3-x} = 0$$

$$\iff 3+x = 0 \text{ ou } 3-x = 0$$

$$\iff x = -3 \text{ ou } x = 3$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

On remplace $\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x}$ par $\sqrt[3]{6}$

$ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$

Et puisque $-3 \in D_E$ et $3 \in D_E$

Alors : $S = \{-3;3\}$

2 $\sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$

On pose : $(E) : \sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$

Déterminons d'abord D_E : l'ensemble de définition de l'équation

$x \in D_E \iff (2+x)^2 \geq 0$ et $(2-x)^2 \geq 0$ et $4-x^2 \geq 0$

$\iff x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ et $(2+x)(2-x) \geq 0$

$\iff (2+x)(2-x) \geq 0$



Si $(2+x)(2-x) \geq 0$
Alors $2+x \geq 0$ ou $2-x \geq 0$

Ça va très bien !

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$
$(2+x)(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour étudier le signe de $(2+x)(2-x)$ ça sera mieux de dresser le tableau de signe

$D_E = [-2;2]$

(Remarquons que sur D_E ; on a : $2-x \geq 0$ et $2+x \geq 0$)

Donc, on peut écrire : $\begin{cases} \sqrt[3]{(2+x)^2} = \sqrt[3]{(2+x)}^{\,2} \\ \sqrt[3]{(2-x)^2} = \sqrt[3]{(2-x)}^{\,2} \end{cases}$

ATTENTION Read Me $\begin{cases} \sqrt{a}^{\,2} = a \text{ avec } a>0 \\ \sqrt{a^2} = |a| \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)}^{\,2} + \sqrt[3]{(2-x)}^{\,2} - 2\sqrt[3]{4-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)}^{\,2} + \sqrt[3]{(2-x)}^{\,2} - 2\sqrt[3]{(2+x)(2-x)} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)}^{\,2} + \sqrt[3]{(2-x)}^{\,2} - 2\sqrt[3]{(2+x)}\,\sqrt[3]{(2-x)} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{(2+x)} - \sqrt[3]{(2-x)}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)} - \sqrt[3]{(2-x)} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)} = \sqrt[3]{(2-x)}$

$\Leftrightarrow 2+x = 2-x$

$\Leftrightarrow x+x = 2-2$

$\Leftrightarrow 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

D'où : $x=0$

Et puisque : $0 \in D_E$

Alors : $S = \{0\}$

Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$
Alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

PLEASE READ ME

En générale

Si a et b ont le même signe
Alors $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

بسم الله الرحمن الرحيم
وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

EXERCICE 18

1- Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0;1[$

2- En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

3- Montrer que : $\alpha = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}$

CORRECTION

1- Posons : $f(x) = x^3 + x - 1$

On a f est continue sur l'intervalle $[0;1]$ Car f est un polynôme

et : $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=1 \end{cases}$

Juste une application directe du T.V.I

Donc : $f(0)\times f(1)<0$

Donc, d'après T.V.I l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α tel que : $0<\alpha<1$

Pour montrer que α est unique, il suffit de vérifier que f est strictement monotone sur l'intervalle $[0;1]$

Etudions la monotonie de f sur $[0;1]$

On a f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ (polynôme)

Soit $x\in[0;1]$

On a : $f'(x)=(x^3+x-1)'$

Donc : $f'(x)=3x^2+1$; pour tout $x\in[0;1]$

$a'=0$ $(ax)'=a$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(ax^n)'=anx^{n-1}$

On a : $\forall x\in[0;1]$; $f'(x)>0$

Donc : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$

D'où : α est unique

2 - Déterminons un encadrement de α d'amplitude 0,25

On a $\alpha\in]0;1[$

L'amplitude l'intervalle $]0;1[$ est : $1-0=1$

Le centre de l'intervalle $]0;1[$ est : $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

On a : $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$

Et on a : $f(1)=1$

Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$

Donc : $\alpha\in]0,5;1[$

L'amplitude l'intervalle $]0,5;1[$ est : $1-0,5=0,5$

Le centre de l'intervalle $]0,5;1[$ est : $\frac{0,5+1}{2}=\frac{3}{4}$

On a : $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{64}$

Donc : $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{4}\right)<0$

Donc : $\alpha \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

L'amplitude de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ est $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=0,25$

D'où : $\alpha \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

3)

$$\alpha=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\alpha}{\alpha^2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha.\alpha^2=1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3=1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3+\alpha-1=0$$

D'où : $\alpha=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}$

Ici, pour déterminer α en fonction de α on essaie de commencer par le résultat demandé $\alpha=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}$ et on transforme pour la rendre sous forme $f(\alpha)=0$

EXERCICE 19

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et à valeur dans l'intervalle $[a;b]$
$(\forall x\in[a;b];f(x)\in[a;b])$
Montrer que la fonction f admet au moins un point fixe $(\text{c-à-d} : (\exists c\in[a;b]);f(c)=c)$

CORRECTION

Soit g la fonction définie sur l'intervalle par :

$g(x)=f(x)-x$

On a : f est continue sur l'intervalle $[a;b]$

et : $x\mapsto -x$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$ polynôme

Donc g est continue sur l'intervalle $[a;b]$

Comme étant somme de deux fonctions continues.

Et puisque $\forall x\in[a;b];f(x)\in[a;b]$

Alors : $a\leqslant f(a)\leqslant b$ et $a\leqslant f(b)\leqslant b$

Donc : $f(a)-a \geqslant 0$ et $f(b)-b \leqslant 0$

On a trois cas possibles.

1er Cas où $f(a)=a$: C'est fini **$c=a$ convient**

2ème Cas où $f(b)=b$: C'est fini **$c=b$ convient**

3ème Cas où $f(a)\neq a$ et $f(b)\neq b$:

Alors ; on aura : $g(a)>0$ et $g(b)<0$

Donc : $g(a)\cdot g(b)<0$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermidiaire, il existe au moins un reél $c\in]a;b[$ tel que : $g(c)=0$

Et par suite, il existe au moins un reél $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=c$

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x^2+1$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. a. Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$
   b. Dresser le tableau de variations de f
   c. Déterminer $f(]-\infty;0])$; $f([0;2])$ et $f([0;3])$
3. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions α ; β et γ tels que : $\alpha<0$; $0<\beta<2$ et $\gamma>0$
   b. Étudier le signe f sur $\mathbb{R}$
4. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\lambda\in]3;4[$

CORRECTION

1. Calcul des limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+1)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x^3$$
$$=-\infty$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2 + 1)$

$= \lim_{x\to+\infty} x^3$

$= +\infty$

2-a- Calculons $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)'$

$= 3x^2 - 6x$

$= 3x(x-2)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 3x(x-2)$

$a' = 0$ $(ax)' = a$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(ax^n)' = anx^{n-1}$

Il faut toujours factoriser - Si possible -

b- Étudions le signe de $f'(x)$

On a :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x-2$	−	−	0	+
$3x$	−	0 +		+
$3x(x-2)$	+	0 −	0	+

Donc :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

Tableau de variations de f

Comment étudier le signe de $f'(x)$?

- On détermine les racines de $f'(x)$
- On dresse le tableau de signe de $f'(x)$

Comment dresser le tableau de variations de f ?

- On a $D_f = \mathbb{R}$. Donc x prend tout les valeurs de $\mathbb{R}$
- Placer le signe de $f'(x)$
- Déduire la monotonie de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

c- Déterminons $f(]-\infty;0])$; $f([0;2])$ et $f([0;3])$

$f(]-\infty;0])$

On a : f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$

Donc : $f(]-\infty;0]) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; f(0)]$

D'où : $f(]-\infty;0]) =]-\infty;1]$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

$f([0;2])$

On a : f est continue et strictement décroissante sur $[0;2]$

Donc : $f([0;2]) = [f(2);f(0)]$

D'où : $f([0;2]) = [-3;1]$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

$f([0;3])$

Dans ce cas, on a f est continue sur l'intervalle $[0;3]$, mais n'est pas strictement monotone

Donc ; on a : $f([0;3]) = [\underset{x\in[0;3]}{Inf} f(x) ; \underset{x\in[0;3]}{Sup} f(x)]$

On a, d'après le tableau de variations de f

$$\begin{cases} \underset{x\in[0;3]}{Inf} f(x) = f(2) = -3 \\ \underset{x\in[0;3]}{Sup} f(x) = f(0) = f(1) = 1 \end{cases}$$

On peut aussi séparer les intervalles

$$f([0;3]) = f([0;2]) \cup f([2;3]) = [-3;1] \cup [-3;1] = [-3;1]$$

D'où : $f([0;3])=[-3;1]$

3) a)

Sur l'intervalle $]-\infty;0]$

On a f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$
Et : $f(]-\infty;0])=]-\infty;1]$
Et puisque : $0\in]-\infty;1]$
Donc, il existe un reél unique $\alpha\in]-\infty;0[$ tel que $f(\alpha)=0$ $\alpha\neq0$
Autrement dit, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $\alpha\in]-\infty;0[$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors : $(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I);\ f(x)=y$

Sur l'intervalle $[0;2]$

On a f est continue et strictement décroissante sur $[0;2]$

Et : $f([0;2])=[-3;1]$
Et puisque : $0\in[-3;1]$
Donc, il existe un reél unique $\beta\in]0;2[$ tel que $f(\beta)=0$ $\begin{cases}\beta\neq0\\ \beta\neq2\end{cases}$
Autrement dit, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $\beta\in]0;2[$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors : $(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I);\ f(x)=y$

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$

On a f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$
Et : $f([2;+\infty[)=[-3;+\infty[$

Et puisque : $0 \in [-3;+\infty[$

Donc, il existe un reél unique $\gamma \in [2;+\infty[$ tel que $f(\gamma)=0$ $\alpha \neq 0$

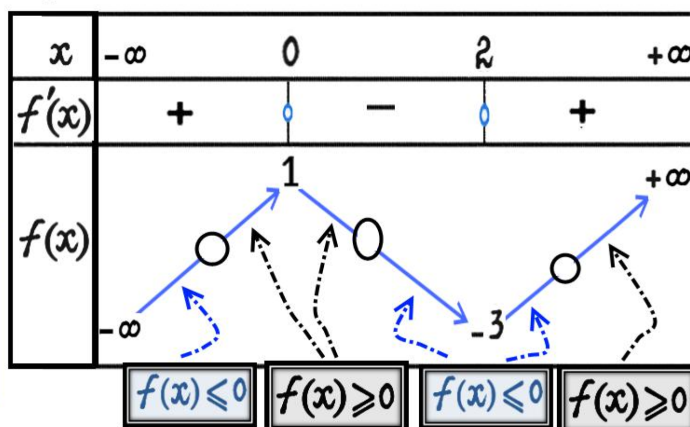
Autrement dit, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $\gamma \in [2;+\infty[$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
>
> $(\forall y \in f(I))(\exists! x \in I); f(x) = y$

b- Le signe de $f(x)$

D'après le tableau de variations de f, on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha] \cup [\beta;\gamma] ; f(x) \leqslant 0 \\ \forall x \in]\alpha;\beta[\cup]\gamma;+\infty[; f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$



4- Montrons que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$; et que $\lambda \in]3;4[$

Sur l'intervalle $]-\infty;2]$

On a : 1 est une valeur maximale de f

Donc : $\forall x \in]-\infty;2] ; f(x) \leqslant 1$

Et par suite : $\forall x \in]-\infty;2] ; f(x) \neq 2$

Donc l'équation $f(x)=2$ n'admet aucune solution sur $]-\infty;2]$

> Si M est une valeur maximale de f sur un intervalle I alors :
>
> $(\forall x \in I) ; f(x) \leqslant M$

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$

On a f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Et $f([2;+\infty[) = [-3;+\infty[$

Et puisque $2 \in [-3;+\infty[$

Alors ; l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique λ sur $[2;+\infty[$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
>
> $(\forall y \in f(I))(\exists! x \in I); f(x) = y$

Conclusion

L'équation $f(x)=2$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$

Vérifions que : $\lambda \in]3;4[$

On a : f est continue sur $[3;4]$

Et : $\begin{cases} f(3)=1 \\ f(4)=17 \end{cases}$

Donc : $f(3)<2<f(4)$

Et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[3;4]$

Alors : d'après T.V.I , l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique λ tel que : $3<\lambda<4$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors :
> $(\forall y \in f([a;b]))(\exists! x \in [a;b]) ; f(x)=y$

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+2x-1$

1- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- a- Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$

b- Est-ce que f admet une fonction réciproque ?

3- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;-1]$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

CORRECTION

1- Calcul des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+2x-1) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+2x-1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

> En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

2- a- On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)'$

$f'(x) = 2x + 2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2x + 2$

$a' = 0$ $(ax)' = a$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$(a x^n)' = a n x^{n-1}$

Étudions le signe de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \iff 2x + 2 = 0$

$\iff x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Donc : f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$;
et strictement croissante sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$

b- On a f est continue sur $\mathbb{R}$

Mais n'est pas strictement monotone

Donc f n'admet pas une fonction réciproque

3- a-

On a g est continue sur l'intervalle $I =]-\infty ; -1]$

Et g est strictement décroissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$J = g(I)$

$J = g(]-\infty ; -1])$

$= [g(-1) ; \lim_{x \to -\infty} g(x)[$

$= [-2 ; +\infty[$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que $J = g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b- Déterminons $g^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $g(y) = x$

y est unique

$g(y)=x \iff y^2+2y-1=x$

$\iff y^2+2y=x+1$

$\iff y^2+2y+1=x+1+1$

$\iff (y+1)^2=x+2$

$\iff y+1=\sqrt{x+2}$ ou $y+1=-\sqrt{x+2}$

$\iff y=-1+\sqrt{x+2}$ ou $y=-1-\sqrt{x+2}$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x\in J$ et on cherche l'unique $y\in I$ tel que $g(y)=x$

Or $y\in]-\infty;-1]$

Donc : $y=-1-\sqrt{x+2}$

D'où : $(\forall x\in J);\ g^{-1}(x)=-1-\sqrt{x+2}$

EXERCICE 22

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

1- a- Déterminer D_f, le domaine de définition de f

b- Montrer que f est une fonction impaire, puis calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

2- a- En utilisant la définition, montrer que f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$

b- En déduire la monotonie de f sur l'intervalle $[-1;0[$

3- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;1]$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

CORRECTION

1- a- **Déterminons D_f**

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $(1-x)(1+x) \geq 0$

Etudions le signe de $(1-x)(1+x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \in [-1;1]$

D'où : $D_f = [-1;0[\cup]0;1]$

$\frac{u(x)}{v(x)}$ ⟶ $v(x) \neq 0$

$\sqrt{u(x)}$ ⟶ $u(x) \geq 0$





Si $(1-x)(1+x) \geq 0$
Alors $1-x \geq 0$ ou $1+x \geq 0$

Ça va très bien !

Pour étudier le signe de $(1-x)(1+x)$ ça sera mieux de dresser le tableau de signe

b- **Montrons que f est une fonction impaire**

On a : $D_f = [-1;0[\cup]0;1]$

Donc : $-x \in D_f$; pour tout $x \in D_f$

Soit $x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{1+\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{-x} = -\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -f(x)$$

Donc f est impaire

$(-x)^2 = x^2$

$|-x| = |x|$

f est impaire $\Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ (\forall x \in D_f) ; -x \in D_f \\ (ii) \ (\forall x \in D_f) ; f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Si f est paire (ou impaire) Alors, il suffit d'étudier f sur $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$

D_E : Domaine d'étude.

Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = +\infty$$

Si on remplace x par 0^+, on trouve $"\frac{2}{0^+}" = +\infty$

2- **Etudions la monotonie de f sur $]0;1]$**

Soient x et y deux éléments de $]0;1]$ tels que $x < y$

$$x<y \Rightarrow x^2<y^2 \text{ et } \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow -x^2>-y^2 \text{ et } \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow 1-x^2>1-y^2 \text{ et } \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}>\sqrt{1-y^2} \text{ et } \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow 1+\sqrt{1-x^2}>1+\sqrt{1-y^2} \text{ et } \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}>\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$
$$\Rightarrow f(x)>f(y)$$

f est strictement décroissante sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

Donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$

La monotonie de f sur l'intervalle $[-1;0[$

On a f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$
Et puisque f est une fonction impaire
Alors: f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;0[$

3 - a - Soit $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in]0;1]$

On a : $x\mapsto 1-x^2$ est continue sur I polynôme
Et : $(\forall x\in I)$; $1-x^2\geq 0$
Donc : $x\mapsto x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est continue sur I
Et on a : $x\mapsto 1$ est continue sur I
Donc : $x\mapsto 1+\sqrt{1-x^2}$ est continue sur I
Et puisque : $x\mapsto x$ est continue sur I
Et : $(\forall x\in I)$; $x\neq 0$
Alors : $g : x\mapsto\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ est continue sur I

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I Et $(\forall x\in I)$; $u(x)\geq 0$ Alors : $x\mapsto\sqrt{u(x)}$ est continue sur I

Si u et v sont deux fonctions continues sur l'intervalle I avec $(\forall x\in I)$; $v(x)\neq 0$ Alors la fonction $x\mapsto\frac{u(x)}{v(x)}$ est continue sur I.

On a g est continue sur l'intervalle $I=]0;1]$
Et g est strictement décroissante sur I
Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que : $J=g(I)$

$J = g(]0;1])$
$= [g(1); \lim_{x \to 0^+} g(x)[$
$= [1; +\infty[$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que $J = g(I)$

b- Déterminons $g^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $g(y) = x$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} = x$$
$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{1-y^2} = xy$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = xy-1$$
$$\Leftrightarrow 1-y^2 = (xy-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 1-y^2 = x^2y^2-2xy+1$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2-2xy+1-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow y(x^2y+y-2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow y=0 \text{ ou bien } x^2y+y-2x=0$$
$$\Leftrightarrow y=0 \text{ ou bien } x^2y+y=2x$$
$$\Leftrightarrow y=0 \text{ ou bien } y(x^2+1)=2x$$
$$\Leftrightarrow y=0 \text{ ou bien } y=\frac{2x}{x^2+1} \quad (x^2+1 \neq 0)$$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$ab=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } b=0$

Or $y \in]0;1]$

Donc : $y = \frac{2x}{x^2+1}$

D'où : $(\forall x \in J); g^{-1}(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}+1-\sqrt{x}$$

1- Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2- En utilisant la définition, étudier la monotonie de f sur $]0;+\infty[$

3- a- Montrer que l'équation : $\frac{1}{x}+1=\sqrt{x}$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$ et que $\alpha\in]2;3[$

b- En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

CORRECTION

1- Calculons $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Il suffit de remplacer.

$\frac{a}{\infty}=0$ $\frac{a}{0}=\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}+1-\sqrt{x}=+\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}+1-\sqrt{x}=-\infty$

2- La monotonie de f sur $]0;+\infty[$

Soient x et y deux éléments de $]0;+\infty[$ tels que $x<y$

$$\begin{aligned} x<y &\Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y} \text{ et } \sqrt{x}<\sqrt{y}\\ &\Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y} \text{ et } -\sqrt{x}>-\sqrt{y}\\ &\Rightarrow \frac{1}{x}-\sqrt{x}>\frac{1}{y}-\sqrt{y}\\ &\Rightarrow \frac{1}{x}-\sqrt{x}+1>\frac{1}{y}-\sqrt{y}+1\\ &\Rightarrow f(x)>f(y)\end{aligned}$$

f est strictement décroissante sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$

Donc : $x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$

D'où f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

3- a- On a l'équation $\frac{1}{x}+1=\sqrt{x}$ est équivalente a $f(x)=0$

On a : $x\longmapsto\frac{1}{x}+1$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

et : $x \longmapsto -\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc : $f : x \longmapsto \frac{1}{x}+1-\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Et puisque f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$J=f(]0;+\infty[)$

$=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)[$

$=]-\infty;+\infty[$

Donc : $(\forall y \in J)(\exists! x \in I) ; f(x)=y$

On prend $y=0$

Donc $(\exists! x \in I) ; f(x)=0$

Autrement dit ; l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :

$(\forall y \in f(I))(\exists! x \in I) ; f(x)=y$

Et on a $f(2)=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$

et $f(3)=\frac{4}{3}-\sqrt{3}$

$f(2)>0$
$f(3)<0$

Donc $f(2)\times f(3)<0$

Donc, d'après T.V.I l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que : $<\alpha<3$

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $f(a)\times f(b)<0$ Alors, il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$

x	2	α	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}>0$	0	$\frac{4}{3}-\sqrt{3}<0$

b- Déterminons un encadrement de α d'amplitude 0,5

$\alpha \in]a;b[\Rightarrow \alpha \neq a$ et $\alpha \neq b$
car $f(a)\neq 0$ et $f(b)\neq 0$, mais $f(\alpha)=0$

On a $\alpha \in]2;3[$

x	2	α	3
$f(x)$	+	0	−

L'amplitude de l'intervalle $]2;3[$ est : $3-2=1$

Le centre de l'intervalle $]2;3[$ est : $\frac{2+3}{2}=2,5$

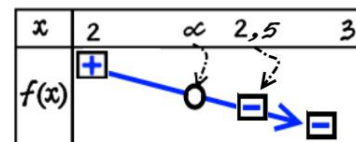
On a : $f(2,5)=\frac{1}{2,5}+1-\sqrt{2,5}=\frac{7}{5}-\sqrt{2,5}$

Donc $f(2,5)<0$

Et puisque $f(2)>0$

Alors $f(2)\times f(2,5)<0$

Donc : $\alpha \in]2;2,5[$



L'amplitude de l'intervalle $]2;2,5[$

D'où : $\alpha \in]2;2,5[$

EXERCICE 24

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=2x+\sqrt{x}-1$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- Étudier les variations de f

2- a- Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α tel que : $0<\alpha<1$

b- Vérifier que : $\sqrt{\alpha}=1-2\alpha$

c- Montrer que : $0<\alpha<\frac{1}{2}$

3- a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

CORRECTION

1- Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{x}-1$$
$$=+\infty$$

Car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-1=+\infty\end{cases}$

Il suffit de remplace x par $+\infty$ ou bien factoriser par x (Le plus puissant)

La monotonie de f

Soient x et y deux éléments de $[0;+\infty[$ tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow 2x<2y$ et $\sqrt{x}<\sqrt{y}$

$\Rightarrow 2x+\sqrt{x}<2y+\sqrt{y}-1$

$\Rightarrow 2x+\sqrt{x}-1<2y+\sqrt{y}-1$

$\Rightarrow f(x)<f(y)$

> f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$;
> $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2 - a -

On a : $x \longmapsto 2x-1$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$

Et on a : $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$

> Cette question est juste une interprétation géométrique de la question
> Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]0;1[$

Donc $f: x \longmapsto 2x+\sqrt{x}-1$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$

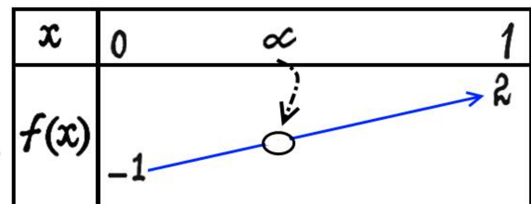
Et : $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=2 \end{cases}$

Donc : $f(0)\times f(1)<0$

Et puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$

Donc, d'après T.V.I l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que : $0<\alpha<1$

> Si f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $f(a)\times f(b)<0$
> Alors, il existe $\alpha\in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$



Et par suite : (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α tel que $0<\alpha<1$

b - Vérifions que : $\sqrt{\alpha}=1-2\alpha$

On a α est la solution de l'équation : $f(x)=0$

Donc : $f(\alpha)=0$

$f(\alpha)=0 \iff 2\alpha+\sqrt{\alpha}-1=0$
$\iff \sqrt{\alpha}=1-2\alpha$

D'où : $\sqrt{\alpha}=1-2\alpha$

Il suffit de déterminer $\sqrt{\alpha}$ en fonction de α à partir de $f(\alpha)=0$

c- Montrons que $0<\alpha<\frac{1}{2}$

On a : $\sqrt{\alpha}>0$ et $\sqrt{\alpha}=1-2\alpha$

Donc : $1-2\alpha>0$

Donc : $-2\alpha>-1$

Donc : $\alpha<\frac{1}{2}$

D'où : $0<\alpha<\frac{1}{2}$




كلمتان خفيفتان على اللسان،
ثقيلتان في الميزان:
سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

3- a- Montrons que f admet une fonction réciproque.

On a : $x\mapsto 2x-1$ est continue sur $[0;+\infty[$

Comme étant un polynôme.

Et : $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ Propriété

Donc f est continue sur $[0;+\infty[$

Comme étant somme de deux fonctions continues

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Et puisque f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que : $J=f(I)$

$J=f([0;+\infty[)$
$=[f(0);\lim_{x\to+\infty}f(x)[$
$=[-1;+\infty[$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b- Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x\in J$, on cherche $y\in I$ tel que $f(y)=x$

$f(y)=x \Leftrightarrow 2y+\sqrt{y}-1=x$

$\Leftrightarrow 2y+\sqrt{y}=x+1$

$\Leftrightarrow 2\left(y+\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)=x+1$

$\Leftrightarrow y+\frac{1}{2}\sqrt{y}=\frac{x+1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}^2+2.\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{16}=\frac{x+1}{2}+\frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+\frac{1}{4}\right)=\frac{x+9}{16}$ $\left(\text{On a bien } \frac{x+9}{16}\geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}+\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{x+9}{16}}$ ou bien $\sqrt{y}+\frac{1}{4}=-\sqrt{\frac{x+9}{16}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{x+9}$ ou bien $\sqrt{y}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\sqrt{x+9}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{4}\sqrt{x+9}-\frac{1}{4}$ ou bien $\sqrt{y}=-\frac{1}{4}\sqrt{x+9}-\frac{1}{4}$

Pour déterminer $f^{-1}(x)$ On prend $x\in J$ et on cherche l'unique $y\in I$ tel que $f(y)=x$

Or $y\in[0;+\infty[$ et $x\in[-1;+\infty[$

Donc on aura : $\sqrt{y}=\frac{1}{4}\sqrt{x+9}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+9}-1\right)$

Donc $y=\frac{1}{16}\left(\sqrt{x+9}-1\right)^2$

D'où : $\forall x\in[-1;+\infty[\ ; f^{-1}(x)=\frac{1}{16}\left(\sqrt{x+9}-1\right)^2$

EXERCICE 25

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x+\sqrt{x-2}$

1- a- Déterminer D_f le domaine de définition de f, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Étudier la continuité de f sur D_f

2- Étudier la monotonie de f sur D_f

3- a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

CORRECTION

1 ~ a ~ **Déterminons D_f**

$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 2$

Donc $D_f = [2;+\infty[$



$\sqrt[n]{u(x)}$ -------------> $u(x) \geq 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x-2}$

$= +\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} = +\infty \end{cases}$

Il suffit de remplace x par $+\infty$ ou bien factoriser par x (Le plus puissant)

b ~ **La continuité de f sur D_f**

On a : $x \mapsto x-2$ est continue sur D_f

et $(\forall x \in D_f); x-2 \geq 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur D_f

Et : $x \mapsto x$ est continue sur D_f

D'où : f est continue sur D_f

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I Et $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$ Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

2 ~ **La monotonie de f sur D_f**

Soient x et y deux éléments de D_f tels que $x < y$

$x < y \Rightarrow x-2 < y-2$ et $x < y$

$\Rightarrow \sqrt{x-2} < \sqrt{y-2}$ et $x < y$

$\Rightarrow x+\sqrt{x-2} < y+\sqrt{y-2}$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

D'où f est strictement croissante sur D_f

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x;y) \in I^2)$;

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

3 ~ a ~ On a f est continue sur D_f et strictement croissante sur D_f

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$J = f(I)$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

$J = f([2;+\infty[)$
$= [f(2); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$
$= [2;+\infty[$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b- Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $f(y) = x$

Pour déterminer $f^{-1}(x)$ On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $f(y) = x$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y-2} = x$$
$$\Leftrightarrow y - 2 + \sqrt{y-2} + \frac{1}{4} = x - 2 + \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-2} + \frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y-2} + \frac{1}{2} = \sqrt{x - \frac{7}{4}} \text{ ou bien } \sqrt{y-2} + \frac{1}{2} = -\sqrt{x - \frac{7}{4}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{7}{4}} \text{ ou bien } \sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{7}{4}}$$

on a $y \in [2;+\infty[\Rightarrow \sqrt{y-2} \in [0;+\infty[$ et $\sqrt{x - \frac{7}{4}} \geq \frac{1}{2}$ car $x \geq 2$

Donc on aura : $\sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{7}{4}}$

Donc : $y - 2 = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{7}{4}}\right)^2$

Donc : $y = 2 + \left(\sqrt{x - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$

D'où : $\forall x \in [-1;+\infty[\; ; \; f^{-1}(x) = 2 + \left(\sqrt{x - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^3$

1- a- Déterminer D_f le domaine de définition de f, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b- Étudier la continuité de f sur D_f

2- Étudier la monotonie de f sur D_f

3- a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

CORRECTION

1- a- Déterminons D_f



$\sqrt[n]{u(x)}$ ----------→ $u(x) \geq 0$

$$x \in D_f \iff x+1 \geq 0$$
$$\iff x \geq -1$$

Donc $D_f = [-1;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-1)^3 = +\infty$$

Il suffit de remplacer.

b- La continuité de f sur D_f

On a : $x \mapsto x+1$ est continue sur D_f

et $(\forall x \in D_f)$; $x+1 \geq 0$

Donc : $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur D_f

et : $x \mapsto -1$ est continue sur D_f

Donc : $x \mapsto (\sqrt{x+1}-1)$ est continue sur D_f

D'où : f est continue sur D_f Composée de deux fonctions

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I Et $(\forall x \in I)$; $u(x) \geq 0$ Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

2- La monotonie de f sur D_f

Soient x et y deux éléments de D_f tels que $x<y$

$$x<y \Rightarrow x+1 < y+1$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-1 < \sqrt{y+1}-1$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x+1}-1)^3 < (\sqrt{y+1}-1)^3$$
$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

D'où f est strictement croissante sur D_f

Si $a \leq b$ Alors $a^{2n+1} \leq b^{2n+1}$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x;y) \in I^2)$; $x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$

3 – a – On a f est continue sur D_f et strictement croissante sur D_f

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$J = f(I)$

$J = f([-1;+\infty[)$

$= [f(-1); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$

$= [-1;+\infty[$

> Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle g(I)

> Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b – Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x\in J$, on cherche $y\in I$ tel que $f(y)=x$

> Pour déterminer $f^{-1}(x)$ On prend $x\in J$ et on cherche l'unique $y\in I$ tel que $f(y)=x$

1er Cas : Si $x\in[0;+\infty[$

$f(y)=x \Leftrightarrow \left(\sqrt{y+1}-1\right)^3 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+1}-1=\sqrt[3]{x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt[3]{x}+1$

$\Leftrightarrow y+1=(\sqrt[3]{x}+1)^2$

$\Leftrightarrow y=(\sqrt[3]{x}+1)^2-1$

$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+1-1$

$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}$

Donc ;

$\forall x\in[0;+\infty[; f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}$

2ème Cas : Si $x\in[-1;0]$

> Ici, on a $x\in[-1;+\infty[$
> Donc x peut être positif ou négatif
> Si $x<0$, on a pas le droit d'écrire $\sqrt[n]{x}$
> Donc, il faut discuter les deux cas suivants :
> - $x\in[0;+\infty[$
> - $x\in]-1;0]$

$$f(y)=x \Leftrightarrow \left(\sqrt{y+1}-1\right)^3=x$$
$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{y+1}-1\right)^3=-x$$
$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{y+1}\right)^3=-x$$
$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{y+1}=\sqrt[3]{-x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=1-\sqrt[3]{-x}$$
$$\Leftrightarrow y+1=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow y=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2-1$$
$$\Leftrightarrow y=1-2\sqrt[3]{-x}+\sqrt[3]{-x}^2-1$$
$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{-x}^2-2\sqrt[3]{-x}$$
$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$

Ici $x<0$, on multiple les deux membre par -1 et on aura $-x>0$
et : $-(a-b)^3=(b-a)^3$
Et on cherche y en fonction de x car $y=f^{-1}(x)$

Donc ; $\forall x\in[-1;0]\ ;\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$

D'où f^{-1} est défimie par :

$\forall x\in[-1;0]\ ;\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$
$\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}$

EXERCICE 27

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x-1}{1-x}$

1- a- Déterminer D_f le domaine de définition de f.
 b- Calculer les limites de f aux bornes de D_f
2- a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$
 b- Dresser le tableau de variations de f.
3- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;1]$
 a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.
 b- Calculer $g(2)$ et en déduire $g^{-1}(-5)$
 c- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

1) a) Déterminons D_f

$\dfrac{u(x)}{v(x)} \dashrightarrow v(x)\neq 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow 1-x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

b) Calcul des limites

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\infty$ ☞ $n>m$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n}{b_mx^{m-n}}=0$ ☞ $m>n$

$=\dfrac{a_n}{b_m}$ ☞ ☞ ☞ ☞ ☞ $m=n$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{-x}$

$=-3$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{-x}$

$=-3$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x-1}{1-x}$

$=-\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

Si on remplace, on va trouver $\dfrac{2}{0}=\infty$, il faut donc déterminer le signe de $1-x$

$\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ et $\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x-1}{1-x}$

$=+\infty$

2) a) Calculons $f'(x)$

On a f est dérivable sur D_f ~Fraction rationnelle~

Soit $x\in D_f$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\dfrac{3x-1}{1-x}\right)'$

$=\dfrac{(3x-1)'(1-x)-(1-x)'(3x-1)}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{3(1-x)-(-1)(3x-1)}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{3-3x+3x-1}{(1-x)^2}$

$a'=0$ $\quad (ax)'=a$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(ax^n)'=anx^{n-1}$

D'où : $\left(\forall x \in D_f\right); f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

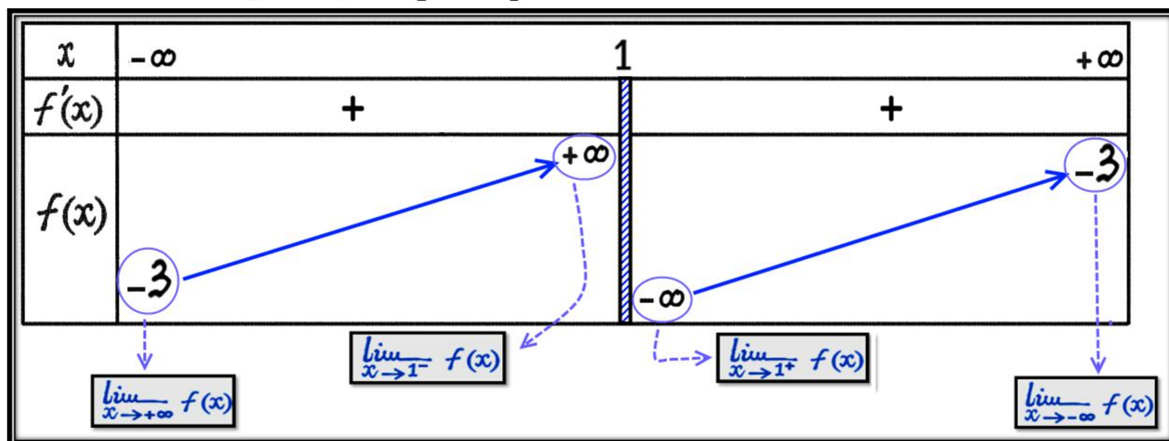
b- Le tableau de variations de f.

On a : $\left(\forall x \in D_f\right); f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

Or $\left(\forall x \in D_f\right); (1-x)^2 > 0$ et $2 > 0$

Donc : $\left(\forall x \in D_f\right);\ f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur les deux intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$



3- a- Soit $g(x)=f(x)$; pour tout $x \in]1;+\infty[$

On a g est continue sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$

Et g est strictement croissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$J = g(I)$

$J = g(]1;+\infty[)$

$= \left]\lim_{x\to1^+} g(x) ; \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$

$=]-\infty;-3[$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle g(I)

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b- Calculons $g(2)$ et $g^{-1}(-5)$



$$g(2)=\frac{3\times 2-1}{1-2}=-5$$

On a : $g(2)=-5$

Donc : $g^{-1}(-5)=2$

Si g admet une fonction réciproque g^{-1}, alors :
$g(x)=y \Leftrightarrow g^{-1}(y)=x$

c- Déterminons $g^{-1}(x)$

Soit $x\in J$, on cherche $y\in I$ tel que $g(y)=x$

$$\begin{aligned} g(y)=x &\Leftrightarrow \frac{3y-1}{1-y}=x \\ &\Leftrightarrow 3y-1=x(1-y) \\ &\Leftrightarrow 3y-1=x-xy \\ &\Leftrightarrow 3y+xy=x+1 \\ &\Leftrightarrow y(3+x)=x+1 \\ &\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{3+x} \quad (3+x\neq 0 \text{ car } x<-3) \end{aligned}$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x\in J$ et on cherche l'unique $y\in I$ tel que $g(y)=x$

D'où : $\forall x\in]-\infty;-3[\ ;\ g^{-1}(x)=\frac{x+1}{3+x}$

EXERCICE 28

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}$

1- a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x+\sqrt{1+x^2}>0$

b- En déduire que $D_f=\mathbb{R}$

2- Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

3- Étudier la monotonie de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

CORRECTION

1 ~ Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x+\sqrt{1+x^2}>0$

1er Cas Si : $x \in [0;+\infty[$

$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$ et $x \geq 0$

$\Rightarrow 1+x^2 \geq 1$ et $x \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1$ et $x \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+x \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+x>0 \quad (\text{Car } 1>0)$

D'où : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; x+\sqrt{1+x^2}>0$

2ème Cas Si : $x \in]-\infty;0[$

On a :

$$\sqrt{1+x^2}+x=\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

Et puisque : $x<0$

Alors : $\sqrt{1+x^2}>0$ et $-x>0$

Donc : $\sqrt{1+x^2}-x>0$

Donc : $(\forall x \in]-\infty;0[) ; x+\sqrt{1+x^2}>0$

Si $x<0$

Alors $\sqrt{1+x^2}>0$ et $x<0$

Donc, on peut pas déduire le signe de $\sqrt{1+x^2}+x$

Dans ce cas, ça sera mieux de multiplier par le conjugué.

D'une part pour lever la racine

et d'autre pour avoir $\sqrt{1+x^2}-x$ qui est strictement positif

Conclusion

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; x+\sqrt{1+x^2}>0$

b ~ Déduisons que : $D_f=\mathbb{R}$

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 0$ et $\sqrt{1+x^2}+x \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \geq -1$ et $\sqrt{1+x^2}+x \geq 0$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geqslant -1$

Et d'après la question précédente, on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2}+x \geqslant 0$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

2- La continuité de f sur $\mathbb{R}$

On a : $x \longmapsto 1+x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ polynôme

et $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} \geqslant 0$

Donc : $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Et puisque : $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Alors : $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}+x$ est continue sur $\mathbb{R}$

> Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
> Et $(\forall x \in I); u(x) \geqslant 0$
> Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

Et comme : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2}+x \geqslant 0$

Alors : $f : x \longmapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3- Étudions la monotonie de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Soient x et y deux éléments de $[0;+\infty[$ tels que $x<y$

$$x<y \Rightarrow x^2<y^2 \text{ et } x<y$$
$$\Rightarrow 1+x^2<1+y^2 \text{ et } x<y$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}<\sqrt{1+y^2} \text{ et } x<y$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+x<\sqrt{1+y^2}+y$$
$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}<\sqrt{\sqrt{1+y^2}+y}$$
$$\Rightarrow f(x)<f(y)$$

> Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$
> Alors :
> $x \leqslant y \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$

> f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x;y) \in I^2);$
> $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x} = +\infty$$

> Il suffit de remplacer.

4- a- Soit $g(x)=f(x)$; pour tout $x \in [0;+\infty[$

On a g est continue sur $I=[0;+\infty[$

Et g est strictement croissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$J = g(I)$

$J = g([0;+\infty[)$

$= [g(0); \lim_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [1;+\infty[$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b- Déterminons $g^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{1+y^2}+y} = x^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2}+y = x^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = x^2 - y$$
$$\Leftrightarrow 1+y^2 = (x^2-y)^2$$
$$\Leftrightarrow 1+y^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2y = x^4 - 1$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x^4-1}{2x^2} \quad (2x^2 \neq 0 \text{ Car } x \in J)$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $g(y) = x$

D'où : $\forall x \in [1;+\infty[\; ; g^{-1}(x) = \frac{x^4-1}{2x^2}$

EXERCICE 29

1- Montrer que l'équation $x^2 - \frac{3}{x} = 2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

2- a- Montrer que : $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha+3}$

b- Montrer que : $\sqrt[3]{5} < \alpha < \sqrt[3]{7}$

CORRECTION

1- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;2]$ par : $f(x)=x^2-\frac{3}{x}$

On va montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique tel que $\alpha\in]1;2[$

On peut aussi considérer la fonction $h: x\mapsto x^2-\frac{3}{x}-2$

$x^2-\frac{3}{x}=2 \Longleftrightarrow h(x)=0$

On a : $x\mapsto x^2$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$

Et : $x\mapsto -\frac{3}{x}$ est continue sur $[1;2]$ Fonction rationnelle

Donc : $f: x\mapsto x^2-\frac{3}{x}$ est continue sur $[1;2]$

Comme étant somme de deux fonctions continues

Et : $\begin{cases} f(1)=1^2-\frac{3}{1}=-2 \\ f(2)=2^2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \end{cases}$

Donc : $f(1)<2<f(2)$

D'où d'après le théorème des valeurs intermediaire, l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution α sur l'intervalle $]1;2[$

Pour prouver que α est unique, il suffit de montrer que la fonction f est strictement monotone sur $[1;2]$

Pourquoi peut-on utiliser la définition?

Car : $x>0$



Donc le carré va conserver le symbole $<$

$\frac{3}{x}$ va changer le symbole $<$

$-\frac{3}{x}$ va le rendre $<$

Soient x et y deux éléments de $[1;2]$ tels que $x<y$

$$\begin{aligned} x<y &\Rightarrow x^2<y^2 \text{ et } \frac{1}{x}>\frac{1}{y} \\ &\Rightarrow x^2<y^2 \text{ et } \frac{3}{x}>\frac{3}{y} \\ &\Rightarrow x^2<y^2 \text{ et } -\frac{3}{x}<-\frac{3}{y} \\ &\Rightarrow x^2-\frac{3}{x}<y^2-\frac{3}{y} \\ &\Rightarrow x^2-\frac{3}{x}-2<y^2-\frac{3}{y}-2 \\ &\Rightarrow f(x)<f(y) \end{aligned}$$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$

Et par suite α est unique

2- a- Montrons que : $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha+3}$

$\alpha=\sqrt[3]{2\alpha+3} \Leftrightarrow \alpha^3=2\alpha+3$

$\Leftrightarrow \alpha^3-3=2\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha^3-3}{\alpha}=\frac{2\alpha}{\alpha}$ $\quad \alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha^3}{\alpha}-\frac{3}{\alpha}=2$

$\Leftrightarrow \alpha^2-\frac{3}{\alpha}=2$

$\Leftrightarrow f(\alpha)=2$

Ici, pour déterminer α en fonction de α on essaie de commencer par le résultat demandé $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha+3}$ et on transforme pour la rendre sous forme $f(\alpha)=2$

Et puisque $f(\alpha)=2$ est un proposition vraie

Alors $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha+3}$

b- Montrons que : $\sqrt[3]{5}<\alpha<\sqrt[3]{7}$

On a $1<\alpha<2$ et $\alpha=\sqrt[3]{2\alpha+3}$

$1<\alpha<2 \Leftrightarrow 2<2\alpha<4$

$\Leftrightarrow 5<2\alpha+3<7$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{2\alpha+3}<\sqrt[3]{7}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5}<\alpha<\sqrt[3]{7}$

Il suffit d'encadrer $\sqrt[3]{2\alpha+3}$ avec $1<\alpha<2$

D'où : $\sqrt[3]{5}<\alpha<\sqrt[3]{7}$

EXERCICE 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^-$ par : $f(x)=\frac{x^2+2}{2x^2+1}$

1- a- Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}^-$

b- En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$

2- Montrer que l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}[$

3- a- Montrer que f admet une fonctions réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

3- Montrer que : $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}$, pour tout $x \in J$

4- Montrer que : $\dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \dfrac{2}{3}$

CORRECTION

1- a- Calculons $f'(x)$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^-$ Fonction rationnelle.

Soit $x \in \mathbb{R}^-$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)'$$
$$= \frac{(x^2+2)'(2x^2+1)-(2x^2+1)'(x^2+2)}{(2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x(2x^2+1)-4x(x^2+2)}{(2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4x^3+2x-4x^3-8x}{(2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-6x}{(2x^2+1)^2}$$

$a'=0$ $\quad (ax)'=a$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(ax^n)'=anx^{n-1}$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; f'(x) = \dfrac{-6x}{(2x^2+1)^2}$

b- La monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; f'(x) = \dfrac{-6x}{(2x^2+1)^2}$

Or $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; (2x^2+1)^2 > 0$

$(2x^2+1)^2$ est strictement positif

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-6x$

Et puisque : $x \leqslant 0$

Alors : $-6x \leqslant 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; f'(x) \leqslant 0$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

2- Montrons que l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet une solution unique α tel que $\alpha \in \left]-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right[$

On a f est continue sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right]$

Comme étant fonction rationnelle

Et :
$$\begin{cases} f\left(-\frac{2}{3}\right)=\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1}{2\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1}=\dfrac{22}{17} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : $f\left(-\frac{2}{3}\right)<\sqrt{2}<f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet au moins une solution α tel que $\alpha \in \left]-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right[$

Et comme f est strictement croissante sur $\left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right]$

Alors α est unique.

3- a-

On a f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$

Et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$$J=f\left(\left]-\infty;0\right]\right)$$
$$=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);f(0)\right]$$
$$=\left]\frac{1}{2};2\right]$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(\mathrm{I})$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

6- Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $f(y)=x$

$$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{y^2+2}{2y^2+1}=x$$

$$\Leftrightarrow y^2+2=x(2y^2+1)$$

$$\Leftrightarrow y^2+2=2xy^2+x$$

$$\Leftrightarrow y^2-2xy^2=x-2$$

$$\Leftrightarrow y^2(1-2x)=x-2$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{x-2}{1-2x} \quad \left(1-2x\neq 0 \text{ Car } x\neq\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} \text{ ou bien } y=-\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}$$

Or $y \in \mathbb{R}^-$

Donc: $y=-\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}=-\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$

D'où : $(\forall x \in J); f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$

Pour déterminer $f^{-1}(x)$
On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $f(y)=x$

4- Montrons que : $\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}<\frac{2}{3}$

On a α est la solution de l'équation $f(x)=\sqrt{2}$

Donc : $f(\alpha)=\sqrt{2}$

Donc : $\alpha=f^{-1}(\sqrt{2})$

$$=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}$$

Et on sait que: $-\frac{2}{3}<\alpha<-\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{2}{3}<-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}<-\frac{1}{2}$

D'où : $\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}<\frac{2}{3}$

On remplace x par $\sqrt{2}$ dans l'expression de $f^{-1}(x)$
On cherche un encadrement
Donc, on peut intervenir le fait que $\alpha \in \left]-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right[$

EXERCICE 31

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[1;2]$ tel que $f(1)=-1$

Montrer qu'il existe au moins un réel α dans l'intervalle $]1;2[$ tel que : $(2-\alpha)f(\alpha)=1-\alpha$

CORRECTION

On va montrer que l'équation $(2-x)f(x)=1-x$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]1;2[$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1;2]$ par : $h(x)=(2-x)f(x)-1+x$

On a : $x\mapsto 2-x$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$ Polynôme

Et : $x\mapsto f(x)$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$ d'après l'énoncé

Donc : $x\mapsto (2-x)f(x)$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$

Comme étant produit de deux fonctions continues

Et comme : $x\mapsto -1+x$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$ Polynôme

Alors $h : x\mapsto (2-x)f(x)-1+x$ est continue sur l'intervalle $[1;2]$

Et on a : $\begin{cases} h(1)=(2-1)f(1)-1+1=f(1)=-1 \\ h(2)=(2-2)f(2)-1+2=1 \end{cases}$

Donc : $h(1)\times h(2)<0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe au moins un réel $\alpha\in]1;2[$ tel que $h(\alpha)=0$

Si h est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $h(a)\times h(b)<0$ Alors, il existe $\alpha\in]a;b[$ tel que $h(\alpha)=0$

Donc : $\exists\alpha\in]1;2[\,;(2-\alpha)f(\alpha)-1+\alpha=0$

D'où : $\exists\alpha\in]1;2[\,;(2-\alpha)f(\alpha)=1-\alpha$

EXERCICE 32

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}$

1- a- Déterminer D_f le domaine de définition de f

b- Calculer les limites de f aux bornes de D_f

2- a- Vérifier que $f(x)=\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ pour tout $x\in D_f$

b- En déduire la monotonie de f

3- Montrer que : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{R});\ x-\sqrt{x^2+4}<0\\(\forall x\in\mathbb{R});\ x+\sqrt{x^2+4}>0\end{cases}$

4- a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J dont on déterminera

b- Déterminer le sence de variations de f^{-1}

c- Déterminer $f^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$.

CORRECTION

1- a- Déterminons D_f



$\sqrt[n]{u(x)}$ ------------> $u(x)\geqslant 0$

$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ------------> $v(x)\neq 0$

$x\in D_f \iff x^2\geqslant 0$ et $x\geqslant 0$ et $\sqrt[3]{x}\neq 0$

$\iff x\in\mathbb{R}$ et $x\geqslant 0$ et $x\neq 0$

$\iff x>0$

Donc : $D_f=]0;+\infty[$

b- Calcul des limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$=+\infty$$

Ici, si on remplace x par $+\infty$, on va trouver la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On peut faire la méthode ci-contre, ou bien factoriser le numérateur par $\sqrt[3]{x}$

2- a- Vérifions que : $f(x)=\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ pour tout $x\in D_f$

Soit $x \in D_f$

On a : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}$

$=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

D'où : $f(x)=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

كلمتان خفيفتان على اللسان،
ثقيلتان في الميزان:
سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

6- La monotonie de f sur D_f

Soient x et y deux éléments de $]0;+\infty[$ tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow \sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{y}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{y}$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}>\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{y}$ et $-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}>-\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}<\sqrt[3]{y}-\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$\Rightarrow f(x)<f(y)$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est strictement croissante sur D_f

3- Montrons que : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{R});\ x-\sqrt{x^2+4}<0\\(\forall x\in\mathbb{R});\ x+\sqrt{x^2+4}>0\end{cases}$

Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ x-\sqrt{x^2+4}<0$

1er cas : Si $x\leqslant 0$

On a $x\leqslant 0$ et $-\sqrt{x^2+4}<0$

Donc $x-\sqrt{x^2+4}<0$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R}^-);\ x-\sqrt{x^2+4}<0$

2ème cas : Si $x\geqslant 0$

بسم الله الرحمن الرحيم
وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا

$x-\sqrt{x^2+4}$

$=\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$=\dfrac{x^2-\sqrt{x^2+4}^2}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$=\dfrac{x^2-(x^2+4)}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$=\dfrac{x^2-x^2-4}{x+\sqrt{x^2+4}}$

$=\dfrac{-4}{x+\sqrt{x^2+4}}$

Si $x\geqslant 0$
Alors $\sqrt{x^2+4}>0$ et $x\geqslant 0$
Donc, on peut pas déduire le signe de $x-\sqrt{x^2+4}$
Dans ce cas, ça sera mieux de multiplier par le conjugué, d'une part pour lever la racine et d'autre part pour avoir $x+\sqrt{x^2+4}$ qui est strictement positif

Or : $-4<0$ et $x+\sqrt{x^2+4}>0$

Donc: $\dfrac{-4}{x+\sqrt{x^2+4}}<0$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ x-\sqrt{x^2+4}<0$ (1)

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R});\ x-\sqrt{x^2+4}<0$

Montrons que $(\forall x\in\mathbb{R});\ x+\sqrt{x^2+4}>0$

1er cas : Si $x\geqslant 0$

On a : $x\geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+4}>0$

Donc : $x+\sqrt{x^2+4}>0$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ x+\sqrt{x^2+4}>0$

2ème cas : Si $x\leqslant 0$

Alors $-x\geqslant 0$

D'après (1), on aura $-x-\sqrt{(-x)^2+4}<0$

Donc: $-x-\sqrt{x^2+4}<0$

Donc: $-\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)<0$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}^-);\ x+\sqrt{x^2+4}>0$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R});\ x+\sqrt{x^2+4}>0$

لَا إِلَٰهَ إِلَّا أَنتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

Conclusion : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{R});\ x-\sqrt{x^2+4}<0\\(\forall x\in\mathbb{R});\ x+\sqrt{x^2+4}>0\end{cases}$

4- a-

On a $x\mapsto x^2$ est continue sur D_f

Et : $(\forall x\in D_f);\ x^2\geqslant 0$

Donc : $x\mapsto\sqrt[3]{x^2}$ est continue sur D_f

Et comme : $x\mapsto -1$ est continue sur D_f

Alors $x\mapsto\sqrt[3]{x^2}-1$ est continue sur D_f

Et puisque : $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ est continue sur D_f

Et $(\forall x\in D_f);\ \sqrt[3]{x}\neq 0$

Alors : $f : x\mapsto\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}}$ est continue sur D_f.

On a f est continue sur $]0;+\infty[$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que

$$J=f\left(]0;+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to 0^+}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$$

> Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle g(I)

> Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

b- Le sens de variations de f^{-1}

On sait que f et f^{-1} ont le même sens de variations

Et puisque f est stictement croissante sur $I=]0;+\infty[$

Alors f^{-1} est strictement croissante sur $J=]-\infty;+\infty[$

c- Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x\in J$, on cherche $y\in D_f$ tel que $f(y)=x$

$$f(y)=x\iff\frac{\sqrt[3]{y^2}-1}{\sqrt[3]{y}}=x$$

$$\iff\sqrt[3]{y^2}-1=x\sqrt[3]{y}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y}^{2} - x\sqrt[3]{y} - 1 = 0 \text{ (E)}$$

Soit l'équation $\sqrt[3]{y}^{2} - x\sqrt[3]{y} - 1 = 0$

On pose $Y = \sqrt[3]{y}$, avec $Y \geqslant 0$

L'équation (E) devient $Y^2 - xY - 1 = 0$

Son discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-x)^2 - 4(1)(-1)$
$= x^2 + 4$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -x \\ c = -1 \end{cases}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 4 > 0$

Puisque $\Delta > 0$

Alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes

$$Y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \text{ et } Y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Et puisque $Y \geqslant 0$

Et d'après le résultat de la question 3

On a $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x + \sqrt{x^2+4} > 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2+4} < 0$

Donc $Y = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Donc $\sqrt[3]{y} = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

Donc $y = \left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right)^3$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f^{-1}(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right)^3$

Ici, on a $\sqrt[3]{y}^{2} = \sqrt[3]{y^2}$ car $y \in]0;+\infty[$

Pour déterminer y, on peut effectuer un changement de variable

x joue le d'un paramètre

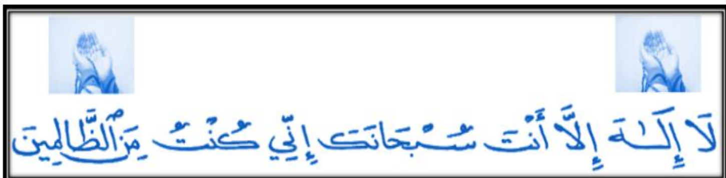
Donc, on va déterminer y en fonction de x

Après avoir déterminer Y

On le remplace par $\sqrt[3]{y}$

Et on déduit y

EXERCICE 33



On considère l'équation (E): $x^3+3x-2=0$

Première partie ☛ **Encadrement d'une solution**

1- Justifier que l'équation (E) admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2- Vérifier que : $\alpha \in]0;1[$

3- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

Deuxième partie **Valeur exacte d'une solution par la methode de Cardon**

Soient u et v deux reéls.

1- Montrer que: $(u+v)^3+3(u+v)-2=u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2$

2- En déduire que si u et v vérifient le système $\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-1 \end{cases}$, alors $(u+v)$ est solution de (E)

3- Montrer que pour tous reéls u et v non nuls, on a:

$$\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2-2u^3-1=0 \\ v=-\frac{1}{u} \end{cases}$$

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E'): $x^2-2x-1=0$

5- En déduire la valeur exacte de α

CORRECTION

1- Montrons que l'équation (E) admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x^3+3x-2$

La monotonie de f

Soit $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=(x^3+3x-2)'$

$=3x^2+3$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=3x^2+3$

Et puisque $(\forall x\in\mathbb{R})$; $3x^2\geq 0$ et $3>0$

$a'=0$ $(ax)'=a$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(ax^n)'=anx^{n-1}$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On a f est continue sur $\mathbb{R}$, car f est un polynôme

et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Et $f(]-\infty;+\infty[)=]\lim_{x\to-\infty} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)[$

$=]-\infty;+\infty[$

Et puisque $0\in J$

Alors, l'équation admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors :
> $(\forall y\in f([a;b]))(\exists! x\in[a;b]); f(x)=y$

2- Vérifions que : $\alpha\in]0;1[$

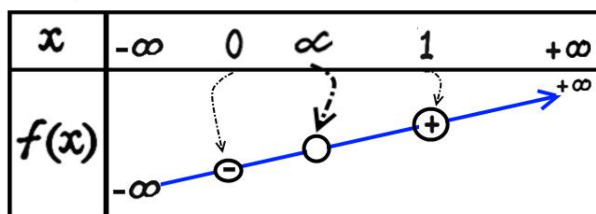
On $\alpha\in\mathbb{R}$

Et $\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(1)=2 \end{cases}$

Donc : $f(0)\times f(1)<0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire on aura $\alpha\in]0;1[$

> Si f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $f(a)\times f(b)<0$
> Alors, il existe $\alpha\in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$



3- Déterminons un encadrement de α d'amplitude 0,5.

On a $\alpha\in]0;1[$

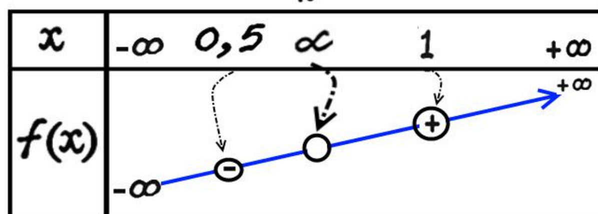
- L'amplitude de l'intervalle $]0;1[$ est $1-0=1$
- Le centre de l'intervalle $]0;1[$ est $\frac{0+1}{2}=0,5$

et $f(0,5)=-0,375$

Donc $f(0,5)\times f(1)<0$

Donc, d'après T.V.I

on aura $\alpha\in]0,5;1[$



Deuxième partie

1- Montrons que : $(u+v)^3+3(u+v)-2=u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2$

$(u+v)^3+3(u+v)-2$
$=u^3+v^3+3uv(u+v)+3(u+v)-2$
$=u^3+v^3+3(u+v)(uv+1)-2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+3ab(a+b)+b^3$

D'où : $(u+v)^3+3(u+v)-2=u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2$

2- Déduisons que : si u et v vérifient le système $\begin{cases}u^3+v^3=2\\uv=-1\end{cases}$ alors $(u+v)$ est solution de (E)

On suppose que : $\begin{cases}u^3+v^3=2\\uv=-1\end{cases}$

Et on montre que $(u+v)$ est solution de (E)

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ on peut :
- Supposer que la proposition P est vraie
- Et montrer que Q est aussi vraie

On a $u^3+v^3=2$ et $uv=-1$

Donc

$$u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2=2+3(-1+1)(u+v)-2=0$$

Et comme $(u+v)^3+3(u+v)-2=u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2$

Alors $(u+v)^3+3(u+v)-2=0$

Et par suite $(u+v)$ est solution de (E)

D'où $\begin{cases}u^3+v^3=2\\uv=-1\end{cases} \Longrightarrow (u+v)$ est solution de (E)

3- Soient u et v deux réels non nuls

Montrons que : $\begin{cases}u^3+v^3=2\\uv=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u^3)^2-2u^3-1=0\\v=-\frac{1}{u}\end{cases}$

$$\begin{cases}u^3+v^3=2\\uv=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3+\left(-\frac{1}{u}\right)^3=2\\v=-\frac{1}{u}\end{cases}$$

On remplace v par $-\frac{1}{u}$ dans la première équation du système

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u^3-\frac{1}{u^3}=2\\v=-\frac{1}{u}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{u^6-1}{u^3}=2\\v=-\frac{1}{u}\end{cases}$$

$\frac{a}{b}=c \Rightarrow a=bc$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^6 - 1 = 2u^3 \\ v = -\dfrac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^6 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\dfrac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\dfrac{1}{u} \end{cases}$$

كلمتان خفيفتان على اللسان، ثقيلتان في الميزان: سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم

D'où $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\dfrac{1}{u} \end{cases}$

4- Considérons l'équation (E'): $x^2 - 2x - 1 = 0$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8$

Et puisque $\Delta > 0$

Alors l'équation (E') admet deux solutions distinctes

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

Donc $S = \{1 + \sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2}\}$

5- La valeur exacte de α

Posons $u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$

Donc $u^3 = 1 + \sqrt{2}$ est solution de (E')

Posons de plus $v = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}$

Donc, on aura bien $\begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\dfrac{1}{u} \end{cases}$

Alors l'équivalence établie à la question 3 prouve que

les réels u et v satisfont le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases}$

Et d'après l'implication de la question ②

On en déduit que $(u + v)$ est solution de (E)

Et puisque l'équation (E) admet une unique

solution α sur $\mathbb{R}$

Alors $\alpha = (u+v)$

D'où $\alpha = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

EXERCICE 34

1- Montrer que la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2-x+2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

2- En déduire que la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x+1} ; x \neq -1 \\ f(-1) = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

1- Déterminons D_f

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x) \geqslant 0$

$x \in D_u \Longleftrightarrow x^2-x+2 \geqslant 0$

Considèrons le trinôme x^2-x+2

Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.2 = -7$

Et comme $\Delta < 0$

Le trinôme x^2-x+2 n'admet aucune racine reélle, et est du signe de a sur $\mathbb{R}$ (ici $a=1$)

Par conséquent : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2-x+2 > 0$

Donc : $x \in D_u \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

$\Delta < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

La continuité de u sur $\mathbb{R}$

On a : $x \mapsto x^2-x+2$ est continue sur $\mathbb{R}$ polynôme

Et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2-x+2 \geqslant 0$

D'où : $u : x \mapsto \sqrt{x^2-x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
Et $(\forall x \in I) ; u(x) \geqslant 0$
Alors : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I

2- La continuité de f sur $\mathbb{R}$.

On a : $x \mapsto \sqrt{x^2-x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

(D'après le résultat de la question précédente)

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2-x+2}$ est continue sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

Et on a : $x \mapsto -2$ est continue sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

(Car elle est sur $\mathbb{R}$)

Donc : $x \mapsto \sqrt{x^2-x+2}-2$ est continue sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

(Somme de deux fonctions continues)

> Si u et v sont deux fonctions continues sur l'intervalle I avec $(\forall x \in I) ; v(x) \neq 0$
> Alors la fonction $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est continue sur I.

Et puisque : $x \mapsto x+1$ est continue sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

Et : $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[\; ; x+1 \neq 0$

Alors : $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x+1}$ est continue sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

☞ Continuité de f en $x_0=-1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1} f(x) &= \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x+1} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+2}-2\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2-x+2}^2-2^2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+2-4}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}+2\right)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-x+2}+2} \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$



> $\frac{0}{0}$ et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

Puisque $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Alors f est continue en $x_0 = -1$

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 35

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}^3+\sqrt{x}}{x-1}$

1- Vérifier que : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

2- Montrer que l'équation $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

3- Montrer que : $\alpha^2(\alpha-2) = 1-\alpha$

CORRECTION

1- Vérifions que : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

Soit $x \in]1;+\infty[$

On a :
$$-\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{-\sqrt{x}(x-1)+1}{x-1}$$
$$= \frac{-x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{x-1}$$
$$= \frac{-\sqrt{x}^2\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{x-1}$$
$$= \frac{1-\sqrt{x}^3+\sqrt{x}}{x-1}$$
$$= f(x)$$

$x \geqslant 0$
$x = \sqrt{x}^2$

D'où : $(\forall x \in]1;+\infty[) ; f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

2- Montrons que l'équation $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

On a $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x} \Longleftrightarrow -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} = 0$
$$\Longleftrightarrow f(x) = 0$$

Donc, il suffit de montrer l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

L'unicité

Étudions la monotonie de f sur $]1;2]$

Soient x et y deux éléments de $]1;2]$ tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow \sqrt{x}<\sqrt{y}$ et $x-1<y-1$

$\Rightarrow -\sqrt{x}>-\sqrt{y}$ et $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{y-1}$

$\Rightarrow -\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}>-\sqrt{y}+\frac{1}{y-1}$

$\Rightarrow f(x)>f(y)$

Donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;2]$

> f est strictement décroissante sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$;
> $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

La continuité de f sur $]1;2]$

On a : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $]1;2]$

Donc : $x \mapsto -\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $]1;2]$

Et on a : $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $]1;2]$

Donc $f : x \mapsto -\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $]1;2]$

(Somme de deux fonctions continues)

Et on a $f(]1;2]) = [f(2);\lim_{x\to 1^+} f(x)[$

$= [1-\sqrt{2};+\infty[$

> $f(2) = -\sqrt{2}+\frac{1}{2-1} = 1-\sqrt{2}$
> $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$
> $= +\infty$

Et puisque $0 \in [1-\sqrt{2};+\infty[$

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
> $(\forall y \in f(I))(\exists! x \in I);\ f(x)=y$

Et par suite l'équation $\frac{1}{x-1}=\sqrt{x}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;2[$

3- Montrons que : $\alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$

On a α est la solution de l'équation $\frac{1}{x-1}=\sqrt{x}$

Donc $\frac{1}{\alpha-1}=\sqrt{\alpha}$

Donc

$$\frac{1}{\alpha-1}=\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}\,(\alpha-1)=1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\,(\alpha-1)\right)^2=1^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha}^2.(\alpha-1)^2=1$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-2\alpha+1)=1$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3-2\alpha^2+\alpha=1$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3-2\alpha^2=1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$$

D'où : $\alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$

EXERCICE 36

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x+7}$

1- a- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^3-3x^2+3x+7=(x-1)^3+8$

b- En déduire que : $D_f=[-1;+\infty[$

2- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3- Montrer que f est continue sur D_f

4- Montrer que f est strictement croissante sur D_f

5- a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$.

CORRECTION

1- a- Vérifions que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^3-3x^2+3x+7=(x-1)^3+8$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$=a^3-3ab(a-b)-b^3$$

$$(x-1)^3+8=x^3-3.x^2.1+3x.1^2-1^3+8$$
$$=x^3-3x^2+3x-1+8$$
$$=x^3-3x^2+3x+7$$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^3-3x^2+3x+7=(x-1)^3+8$

b- Déduisons que : $D_f=[-1;+\infty[$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 7 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^3 + 8 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^3 \geqslant -8$
$\Leftrightarrow x - 1 \geqslant -\sqrt[3]{8}$
$\Leftrightarrow x - 1 \geqslant -2$
$\Leftrightarrow x \geqslant -2 + 1$
$\Leftrightarrow x \geqslant -1$



$\sqrt[n]{u(x)}$ ------------> $u(x) \geqslant 0$

Soit $b \geqslant 0$
$a^3 \geqslant b \Rightarrow a \geqslant \sqrt[3]{b}$
$a^3 \geqslant -b \Rightarrow a \geqslant -\sqrt[3]{b}$

D'où : $D_f = [-1 ; +\infty[$

2- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{(x-1)^3 + 8}$
$= +\infty$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^3 + 8 = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

3- La continuité de f sur D_f

On a $x \mapsto (x-1)^3 + 8$ est continue sur D_f polynôme

Et : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (x-1)^3 + 8 \geqslant 0$

Donc : $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^3 + 8}$ est continue sur D_f

Si u est une fonction continue sur l'intervalle I
Et $(\forall x \in I) ; u(x) \geqslant 0$
Alors : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I

4- La monotonie de f sur D_f

Soient x et y deux éléments de $]0 ; +\infty[$ tels que $x < y$

$x < y \Rightarrow x - 1 < y - 1$
$\Rightarrow (x-1)^3 < (y-1)^3$
$\Rightarrow (x-1)^3 + 8 < (y-1)^3 + 8$
$\Rightarrow f(x) < f(y)$

Donc : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x ; y) \in I^2)$;
$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

D'où f est continue et strictement croissante sur D_f

5- a- On a f est continue sur D_f et f est strictement croissante sur D_f

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$$J = f([-1;+\infty[)$$
$$= [f(-1); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$
$$= [0;+\infty[$$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

6) Déterminons $f^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $f(y) = x$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{(y-1)^3+8} = x$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^3 = x-8$$

$x \geqslant 0$

Pour déterminer $f^{-1}(x)$ On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $f(y) = x$

Ici, on a $x \in [0;+\infty[$
Donc x peut être positif ou négatif
Si $x-8<0$, on a pas le droit d'écrire $\sqrt[n]{x}$
Donc, il faut discuter les deux cas suivants :

- $x \in [0;8[$
- $x \in [8;+\infty[$

1er Cas : Si $x \in [8;+\infty[$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{(y-1)^3+8} = x$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^3 = x-8$$
$$\Leftrightarrow y-1 = \sqrt[3]{x-8}$$
$$\Leftrightarrow y = 1+\sqrt[3]{x-8}$$

Donc

$$\forall x \in [8;+\infty[; f^{-1}(x) = 1+\sqrt[3]{x-8}$$

2ème Cas : Si $x \in [0;8[$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{(y-1)^3+8} = x$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^3 = x-8$$
$$\Leftrightarrow (1-y)^3 = 8-x$$
$$\Leftrightarrow 1-y = \sqrt[3]{8-x}$$
$$\Leftrightarrow y = 1-\sqrt[3]{8-x}$$

$$(y-1)^3 = x-8$$
$$-(y-1)^3 = -(x-8)$$
$$(-(y-1))^3 = 8-x$$
$$(1-y)^3 = 8-x$$

Donc

$$\forall x \in [0;8[; f^{-1}(x) = 1-\sqrt[3]{8-x}$$

Conclusion

$$\begin{cases} \forall x \in [0;8[; f^{-1}(x) = 1-\sqrt[3]{8-x} \\ \forall x \in [8;+\infty[; f^{-1}(x) = 1+\sqrt[3]{x-8} \end{cases}$$

EXERCICE 37

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$
tel que $f([0;1]) \subset]1;2[$
Montrer que : $(\exists c \in]0;1[)$; $f(c)=\frac{1}{c}$

CORRECTION

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$
par : $g(x)=xf(x)-1$

On a f est continue sur $[0;1]$
(D'après l'enoncé)
Et : $x \mapsto x$ est continue sur $[0;1]$
polynôme
Donc : $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0;1]$
Produit de deux fonctions continues
Et : $x \mapsto -1$ est continue sur $[0;1]$
fonction constante
Donc : $g : x \mapsto xf(x)-1$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$
Et
$g(0)=0.f(0)-1=-1$
$g(1)=1.f(1)-1=f(1)-1$

Et on a $f([0;1]) \subset]1;2[$
Donc $(\forall x \in [0;1])$; $1<f(x)<2$
Donc $(\forall x \in [0;1])$; $f(x)-1>0$
Donc $f(1)-1>0$
On aura $\begin{cases} g(0)<0 \\ g(1)>0 \end{cases}$
Donc $g(0) \cdot g(1)<0$
Et d'après T.V.I il existe un reél $c \in]0;1[$ tel que $g(c)=0$
On a $g(c)=0 \Leftrightarrow cf(c)-1=0 \Leftrightarrow cf(c)=1 \Leftrightarrow f(c)=\frac{1}{c}$ $c \neq 0$

Pour déterminer la nouvelle fonction à considérer, on remplace c par x, on aura
$f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xf(x)=1$
$\Leftrightarrow xf(x)-1=0$
Donc $g(x)=xf(x)-1$
$f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)=0$

On ne peut pas considérer la fonction $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}$
Car l'image de 0
(ou $\lim_{x \to 0^+} g(x)$) n'existe pas

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ avec $f(a) \times f(b)<0$
Alors, il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha)=0$

D'où $(\exists c \in]0;1[); f(c)=\frac{1}{c}$

EXERCICE 38

Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction

f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2+ax+1}{x-1}, x>1 \\ f(x)=\frac{3x+b}{2}; x\leqslant 1 \end{cases}$

CORRECTION

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a : $\forall x \in]1;+\infty[; x-1 \neq 0$

Donc $f_1 : x \mapsto \frac{3x^2+ax+1}{x-1}$ est continue sur $]1;+\infty[$

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$

On a $f_2 : x \mapsto \frac{3x+b}{2}$

On a f_2 est continue sur $]-\infty;1[$ Polynôme

Donc f est continue sur les deux intervalles $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il suffit qu'elle soit continue en $x_0=1$

Si $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors f est continue en x_0

Calculons $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+ax+1}{x-1}$$

Si on remplace x par 1 on aura : $\frac{4+a}{0}$

Deux cas à discuter :

$4+a\neq 0$; dans ce cas on aura : $\frac{A}{0}=\infty$

$4+a=0$; dans ce cas on aura : $\frac{0}{0}$

Si $a\neq -4$ $\quad 4+a\neq 0$

Alors $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\infty$

Donc f ne sera pas continue en $x_0=1$

Si $a=-4$

Alors $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2-4x+1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} (3x-1)$$

$$=2$$

Si $x_0\neq 0$ est une racine de ax^2+bx+c, alors $ax^2+bx+c=(x-x_0)\left(ax-\frac{c}{x_0}\right)$


Calculons $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x+b}{2}=\frac{3+b}{2}$$


Calculons $f(1)$

$$f(1)=\frac{3.1+b}{2}=\frac{3+b}{2}$$

Il suffit de remplacer.

Pour calculer $f(1)$, on doit remplacer x par 1 dans la deuxième expression de f où on a $x\leqslant 1$

f est continue en $x_0=1$

Lorsque : $a=-4$ et $\frac{3+b}{2}=2$

Donc $a=-4$ et $b=1$

$\frac{3+b}{2}=2 \Leftrightarrow 3+b=4 \Leftrightarrow b=1$

EXERCICE 39

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{2x+1}-1<\sqrt{x+2}$

CORRECTION

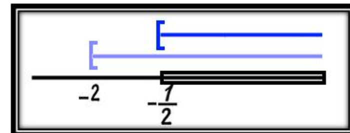
Déterminons d'abord D_I l'ensemble de définition de l'inéquation

$\sqrt{u(x)} \dashrightarrow u(x)\geqslant 0$

$x\in D_I \Leftrightarrow 2x+1\geqslant 0$ et $x+2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2x\geqslant -1$ et $x\geqslant -2$

$\Leftrightarrow x\geqslant -\frac{1}{2}$ et $x\geqslant -2$



Donc $D_I=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Remarquons que $\sqrt{2x+1}-1$ peut être positif ou négatif.
Mais $\sqrt{2x+1}$ et $\sqrt{x+2}+1$ sont tous positifs.

Soit S l'ensemble de solution de l'inéquation

Soit $x\in D_I$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1}-1<\sqrt{x+2} &\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}<\sqrt{x+2}+1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}^2<\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2\\ &\Leftrightarrow 2x+1<\sqrt{x+2}^2+2\sqrt{x+2}+1\\ &\Leftrightarrow 2x+1<x+2+2\sqrt{x+2}+1\\ &\Leftrightarrow 2x+1-x-2-1<2\sqrt{x+2}\\ &\Leftrightarrow x-2<2\sqrt{x+2}\end{aligned}$$

Si : $x<2$

On l'inégalité : $x-2<2\sqrt{x+2}$ est vraie

Donc $\left(]-\infty;2[\cap D_I\right)\subset S$

Donc $\left[-\frac{1}{2};2\right[\subset S$ ①

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

Si $x \geq 2$ $x-2 \geq 0$

On a

$$\sqrt{2x+1}-1<\sqrt{x+2} \Longleftrightarrow x-2<2\sqrt{x+2}$$
$$\Longleftrightarrow (x-2)^2<\left(2\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$\Longleftrightarrow x^2-4x+4<4(x+2)$$
$$\Longleftrightarrow x^2-4x+4<4x+8$$
$$\Longleftrightarrow x^2-8x-4<0$$

Donc, résoudre l'inéquation $\sqrt{2x+1}-1<\sqrt{x+2}$ revient à résoudre $x^2-8x-4<0$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Soit l'inéquation $x^2-8x-4<0$

Son discriminant $\Delta=b^2-4ac=80$

Puisque $\Delta>0$

Alors le trinôme x^2-8x-4 admet deux racines distinctes

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+\sqrt{80}}{2}=\frac{8+4\sqrt{5}}{2}=4+2\sqrt{5}$$

et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-\sqrt{80}}{2}=\frac{8-4\sqrt{5}}{2}=4-2\sqrt{5}$

On cherche à résoudre une inéquation, il faut donc dresser le tableau de signe

x	$-\infty$	$4-2\sqrt{5}$	2	$4+2\sqrt{5}$	$+\infty$
x^2-8x-4	+	0	−	0	+

On résoud l'inéquation $x^2-8x-4<0$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Donc, on aura : $[2;4+2\sqrt{5}[\subset S$

D'où, d'après ① et ② : $S=\left[-\frac{1}{2};2\right[\cup[2;4+2\sqrt{5}[=\left[-\frac{1}{2};4+2\sqrt{5}\right[$

EXERCICE 40

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x+2>\sqrt[3]{x^2+8}$

CORRECTION

Déterminons l'ensemble de définition de l'inéquation

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^2+8>0$

Donc $D_I=\mathbb{R}$

Résolvons l'inéquation :

- Si $x \leq -2$

On aura $x+2 \leq 0$ et $\sqrt[3]{x^2+8} > 0$

Donc l'inéquation n'admet aucune solution

- Si $x > -2$

On aura $x+2 > 0$ et $\sqrt[3]{x^2+8} > 0$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

Donc

$$x+2 > \sqrt[3]{x^2+8} \Longleftrightarrow (x+2)^3 > \sqrt[3]{x^2+8}^{\,3}$$
$$\Longleftrightarrow x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 > x^2 + 8$$
$$\Longleftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^2 - 8 > 0$$
$$\Longleftrightarrow x^3 + 5x^2 + 12x > 0$$
$$\Longleftrightarrow x(x^2 + 5x + 12) > 0$$

$a > b \Longleftrightarrow a^3 > b^3$

Étudions le signe de $x(x^2+5x+12) > 0$

Soit le trinôme $x^2+5x+12$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -23$

Puisque Δ

Alors le trinôme $x^2+5x+12$ ne possède aucune racine

Et Son signe dépend du signe de $a = 1$

Puisque $a = 1 > 0$

Alors $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2+5x+12 > 0$

Donc $x(x^2+5x+12) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$

Donc $x > 0$

Donc $x > 0$ et $x > -2$

D'où $S =]0;+\infty[$

On résoud l'inéquation dans le cas $x > -2$ $(x \in]-2;+\infty[)$

On a trouver $x > 0$ $(x \in]0;+\infty[)$

Donc $x \in]-2;+\infty[\cap]0;+\infty[$

Donc $x \in]0;+\infty[$

EXERCICE 41

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $\sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$

$\left(\text{Poser } y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} \right)$

CORRECTION

Déterminons d'abord D_E ; l'ensemble de définition de l'équation

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(1+x)^2 \geqslant 0$ et $(1-x)^2 \geqslant 0$

Donc $x \in D_E \Leftrightarrow 1-x^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geqslant 0$







Si $(1-x)(1+x) \geqslant 0$

Alors $1-x \geqslant 0$ ou $1+x \geqslant 0$

Ça va très bien !

Etudions le signe de $(1-x)(1+x)$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$1-x$	+		+	0	−	
$1+x$	−	0	+		+	
$(1-x)(1+x)$	−	0	+	0	−	

Pour étudier le signe de $(1-x)(1+x)$ ça sera mieux de dresser le tableau de signe

Donc : $x \in D_E \Leftrightarrow x \in [-1;1]$

D'où : $D_E = [-1;1]$

On a 1 et -1 ne sont pas des solutions de l'équation (E)

Donc : $(\forall x \in D_E)$; $1-x^2 > 0$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} + 4\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)}} + 4\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + 4\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}} = 4$$

Posons : $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$

L'équation (E) devient $y + \frac{4}{y} = 4$ et $y \neq 0$

Donc $\dfrac{y^2+4y}{y}=4$ et $y\neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{y^2+4y}{y}=4 \text{ et } y\neq 0 &\Leftrightarrow y^2+4=4y \text{ et } y\neq 0\\ &\Leftrightarrow (y-2)^2=0 \text{ et } y\neq 0\\ &\Leftrightarrow y-2=0 \text{ et } y\neq 0\\ &\Leftrightarrow y=2 \text{ et } y\neq 0\end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}=2 &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}=8\\ &\Leftrightarrow 1+x=8(1-x)\\ &\Leftrightarrow 1+x=8-8x\\ &\Leftrightarrow 9x=7\\ &\Leftrightarrow x=\frac{7}{9}\end{aligned}$$

Et puisque $\frac{7}{9}\in\,]-1;1[$

Alors $S=\left\{\frac{7}{9}\right\}$

EXERCICE 42

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^7+3}{x^7-2}$

1- a- Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b- Calculer les limites de f aux bornes de D_f

2- a- Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in D_f$

b- En déduire la monotonie de f

3- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;\sqrt[7]{2}[$

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

CORRECTION

1- a- Déterminons D_f

$$\begin{aligned}x\in D_f &\Leftrightarrow x^7-2\neq 0\\ &\Leftrightarrow x^7\neq 2\\ &\Leftrightarrow x\neq\sqrt[7]{2}\end{aligned}$$

b- Calculons les limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x<\sqrt[7]{2}}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x>\sqrt[7]{2}}} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^7+3}{x^7-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^7}{x^7}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^7+3}{x^7-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^7}{x^7}=2$$

$$\lim_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x<\sqrt[7]{2}}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x<\sqrt[7]{2}}}\frac{2x^7+3}{x^7-2}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x>\sqrt[7]{2}}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x>\sqrt[7]{2}}}\frac{2x^7+3}{x^7-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\infty$; $n>m$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_mx^{m-n}}=0$; $m>n$

$=\frac{a_n}{b_m}$; $m=n$

Si on remplace x par $\sqrt[7]{2}^-$, on trouve $\frac{"7"}{0^-}=-\infty$

Si on remplace x par $\sqrt[7]{2}^+$, on trouve $\frac{"7"}{0^+}=+\infty$

2-

a- Calculons $f'(x)$, pour tout $x\in D_f$

Soit $x\in D_f$

$$f'(x)=\left(\frac{2x^7+3}{x^7-2}\right)'$$
$$=\frac{(2x^7+3)'\cdot(x^7-2)-(x^7-2)'\cdot(2x^7+3)}{(x^7-2)^2}$$
$$=\frac{14x^6(x^7-2)-7x^6(2x^7+3)}{(x^7-2)^2}$$
$$=\frac{14x^{13}-28x^6-14x^{13}-21x^6}{(x^7-2)^2}$$
$$=\frac{-49x^6}{(x^7-2)^2}$$

D'où $(\forall x\in D_f)$; $f'(x)=\frac{-49x^6}{(x^7-2)^2}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$$

$a'=0$ $\quad (ax)'=a$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(ax^n)'=anx^{n-1}$

b- La monotonie de f sur D_f

On a $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \dfrac{-49x^6}{(x^7-2)^2}$

Et puisque $(\forall x \in D_f)$; $(x^7-2)^2 > 0$ et $-49x^6 \leq 0$

Alors $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) \leq 0$

D'où f est strictement décroissante sur les deux intervalles $]-\infty;\sqrt[7]{2}[$ et $]\sqrt[7]{2};+\infty[$

3- a- Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}

On a g est une fonction continue sur I

Et g est strictement décroissante sur I

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que : $J = g(I)$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle g(I)

$J = g\left(]-\infty;\sqrt[7]{2}[\right)$

$= \left]\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt[7]{2}\\ x<\sqrt[7]{2}}} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

$=]-\infty;2[$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b- Déterminons $g^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$g(y) = x \iff \frac{2y^7+3}{y^7-2} = x$$

$$\iff 2y^7+3 = x(y^7-2)$$

$$\iff 2y^7+3 = xy^7-2x$$

$$\iff 2y^7-xy^7 = -2x-3$$

$$\iff y^7(2-x) = -2x-3$$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$\Leftrightarrow y^7=\frac{-2x-3}{2-x}$$

$$\Leftrightarrow y^7=\frac{2x+3}{x-2}$$

Si $x\leqslant-\frac{3}{2}$

$$g(y)=x\Leftrightarrow y^7=\frac{2x+3}{x-2}$$

$\frac{2x+3}{x-2}>0$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt[7]{\frac{2x+3}{x-2}}$$

Donc $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]; g^{-1}(x)=\sqrt[7]{\frac{2x+3}{x-2}}$

Si $x>-\frac{3}{2}$

$$g(y)=x\Leftrightarrow y^7=\frac{2x+3}{x-2}$$

$\frac{2x+3}{x-2}<0$

$$\Leftrightarrow -y^7=-\frac{2x+3}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow (-y)^7=-\frac{2x+3}{x-2}$$

$-\frac{2x+3}{x-2}>0$

$$\Leftrightarrow -y=\sqrt[7]{-\frac{2x+3}{x-2}}=\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow y=-\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}}$$

Donc $\forall x\in\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[; g^{-1}(x)=-\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}}$

Conclusion

$$\begin{cases} g^{-1}(x)=\sqrt[7]{\frac{2x+3}{x-2}} & ; x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] \\ g^{-1}(x)=-\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}} & ; x\in\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\end{cases}$$

EXERCICE 43

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x} \; ; x>1 \\ f(x)=(1+k)^2 \; ; x\leqslant 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs du reél k pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION

☞ La continuité de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a : $x\longmapsto\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Donc en particulier sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Et : $x\longmapsto\frac{1}{x}$ est continue sur $]1;+\infty[$

D'où $f:x\mapsto\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ est continue sur $]1;+\infty[$

☞ La continuité de f sur l'intervalle $]-\infty;1[$

On a $f:x\mapsto(1+k)^2$ est continue sur $]-\infty;1[$ polynôme

Il en résulte que f est continue sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$

☞ La continuité de f en $x_0=1$

pour que f soit continue en $x_0=1$, il faut que :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=f(1)$$

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)=f(x_0)$

Alors f est continue en x_0

On a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \sqrt{x}+\frac{1}{x}=2$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (x+k)^2=(1+k)^2$

Il suffit de remplacer.

Donc, pour que f soit continue en $x_0=1$, il faut que :

$(1+k)^2=2$

$(1+k)^2=2 \iff 1+k=\sqrt{2}$ ou $1+k=-\sqrt{2}$

$\iff k=\sqrt{2}-1$ ou $k=-\sqrt{2}-1$

D'où f est continue en $x_0=1$, et donc sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $k=\sqrt{2}-1$ ou $k=-\sqrt{2}-1$

EXERCICE 44

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$$

1- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-a- Calculer $f'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

b- En déduire la monotonie de f

c- Dresser le tableau de variations de f

3- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions réels α et β tels que $\alpha<0$ et $\beta>0$

4- Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

CORRECTION

1- Calcul des limites

Ici, le dominant - bien sûr - c'est x^2.
Donc la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ vaut $+\infty$
Mais il faut le montrer.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$

On a $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$

$$=x^2\left(1-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\right)$$

On sait que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $|\sin x|\leqslant 1$ et $|\cos x|\leqslant 1$

$(\forall t\in\mathbb{R})$; $|\cos t|\leqslant 1$

$(\forall t\in\mathbb{R})$; $|\sin t|\leqslant 1$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqslant\dfrac{1}{|x|}$ et $\dfrac{|\cos x|}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$ et $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}=0$

On aura donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$

$$=+\infty$$

De même, on a : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$ et $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$

On aura donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right)$
$= +\infty$

2-a- Calculons $f'(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$f'(x) = (x^2 - x\sin x - \cos x)'$
$= 2x - (x'.\sin x + x.(\sin x)') - (\cos x)'$
$= 2x - (\sin x + x\cos x) - (-\sin x)$
$= 2x - \sin x - x\cos x + \sin x$
$= 2x - x\cos x$
$= x(2 - \cos x)$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\forall t \in \mathbb{R});\ -1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = x(2 - \cos x)$

b- La monotonie de f

Étudions le signe de $f'(x)$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = x(2 - \cos x)$

On sait que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R});\ 1 \leqslant 2 - \cos x \leqslant 3$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R});\ 2 - \cos x \geqslant 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
REGLE	Signe de -a		Signe de a

D'où : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0] ;\ f'(x) \leqslant 0 \\ \forall x \in [0;+\infty[;\ f'(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Et par suite, f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$
et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

c- Le tableau de variations de f.

D'après les résultats des questions précédentes, on aura :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

3- Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions réels α et β tels que $\alpha<0$ et $\beta>0$

Sur l'intervalle $]-\infty;0]$

On a f est continue sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Comme étant produit et somme de fonctions continues

Et f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Et on a : $f(]-\infty;0]) = \left[f(0);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

$=[-1;+\infty[$

Et puisque $0\in[-1;+\infty[$

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]-\infty;0]$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
> $(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I) ; f(x)=y$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$

On a f est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Comme étant produit et somme de fonctions continues

Et f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Et on a : $f([0;+\infty[) = \left[f(0);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

$=[-1;+\infty[$

Et puisque $0\in[-1;+\infty[$

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $[0;+\infty[$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
> $(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I) ; f(x)=y$

4- Le signe de $f(x)$

☞ Sur l'intervalle $]-\infty;\alpha]$

On a f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$

Soit $x\in]-\infty;\alpha]$

$x\in]-\infty;\alpha] \Rightarrow x\leqslant\alpha$

$\Rightarrow f(x)\geqslant f(\alpha)$ $\quad f(\alpha)=0$

$\Rightarrow f(x)\geqslant 0$

Donc $\forall x\in]-\infty;\alpha]; f(x)\geqslant 0$

> f est strictement **décroissante** sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x\leqslant y\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$

☞ Sur l'intervalle $[\alpha;0]$

On a f est strictement décroissante sur $[\alpha;0]$

Soit $x\in[\alpha;0]$

$x\in[\alpha;0] \Rightarrow x\geqslant\alpha$

$\Rightarrow f(x)\leqslant f(\alpha)$

$\Rightarrow f(x)\leqslant 0$

Donc $\forall x\in[\alpha;0]; f(x)\leqslant 0$

> f est strictement **décroissante** sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x\geqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$

☞ Sur l'intervalle $[0;\beta]$

On a f est strictement croissante sur $[0;\beta]$

Soit $[0;\beta]$

$x\in[0;\beta] \Rightarrow x\leqslant\beta$

$\Rightarrow f(x)\leqslant f(\beta)$

$\Rightarrow f(x)\leqslant 0$

Donc $\forall x\in[0;\beta]; f(x)\leqslant 0$

> f est strictement **croissante** sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$

☞ Sur l'intervalle $[\beta;+\infty[$

On a f est strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$

Soit $x\in[\beta;+\infty[$

$x\in[\beta;+\infty[\Rightarrow x\geqslant\beta$

$\Rightarrow f(x)\geqslant f(\beta)$

$\Rightarrow f(x)\geqslant 0$

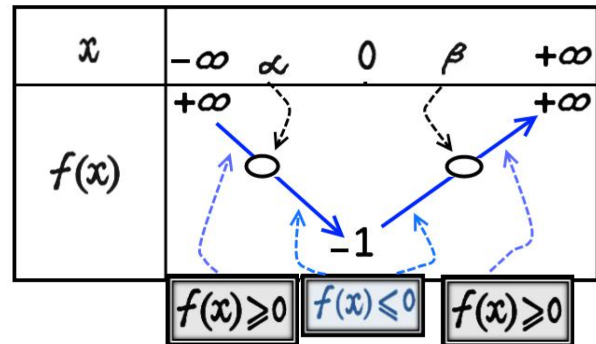
Donc $\forall x\in[\beta;+\infty[; f(x)\geqslant 0$

> f est strictement **croissante** sur I si et seulement si $(\forall(x;y)\in I^2)$; $x\geqslant y\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$

Conclusion

$\forall x \in]-\infty;\alpha] \cup [\beta;+\infty[; f(x) \geq 0$

$\forall x \in [\alpha;\beta] ; f(x) \leq 0$



EXERCICE 45

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{3x}$

1- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2- Montrer que f est continue sur D_f.

3- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4- Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

CORRECTION

1- Déterminons D_f

$x \in D_f \iff 3x \neq 0$

$\iff x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\dfrac{u(x)}{v(x)} \dashrightarrow v(x) \neq 0$

2- La continuité de f sur D_f

On a $u : x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc u est continue sur D_f

Et on a : $u(D_f) \subset \mathbb{R}$

Alors $v \circ u$ est continue sur D_f

Comme étant composée de deux fonctions.

Et comme : $x \mapsto 3x$ est continue sur D_f

Et $(\forall x \in D_f) ; 3x \neq 0$

Alors $f : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3x}$ est continue sur D_f

> Si
> - u est continue sur I
> - v est continue sur J
> - $u(I) \subset J$
>
> Alors
>
> $v \circ u$ est continue sur I

3- Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On sait que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \quad |\sin(2x)| \leq 1$

$(\forall t \in \mathbb{R}) ; |\sin x| \leq 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\dfrac{|\sin(2x)|}{|3x|} \leqslant \dfrac{1}{|3x|}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\left|\dfrac{\sin(2x)}{3x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|3x|}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|3x|}$

Et puisque : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{|3x|} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|3x|} = 0$

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4- Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{3x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2x}{3x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2}{3} \\ &= 1 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Remarque

On a $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{2}{3} \in \mathbb{R}$

On dit que f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$

Et on définit une nouvelle fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) ; x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

EXERCICE 46

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$

1- Déterminer D_f le domaine de définition de f

2- Etudier la continuité de f sur D_f

3- Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$

CORRECTION

1- Déterminons D_f.

$x \in D_f \Leftrightarrow \sin(\cos x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x \neq k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

> Les deux fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$

> $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$.
> $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

> $\cos x = k\pi \Leftrightarrow k = 0$
> car $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
> $k \in \mathbb{Z}$
> Donc la seule valeur de k est $k = 0$

2- La continuité de f sur D_f

On a : $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
Donc elle est sur D_f
Et : $x \mapsto -\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
Et comme $x \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}$
Alors $x \mapsto 1 - \sin x$ est continue sur D_f (1)
Et on a : $u : x \mapsto \cos x$ est continue sur D_f
Et : $(\forall x \in D_f); \cos x \in \mathbb{R}$ (i.e $u(D_f) \subset \mathbb{R}$)
Et $v : x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
Donc $v \circ u$ est continue sur D_f (2)
Comme étant composée de deux fonctions.
Et puisque $(\forall x \in D_f); \sin(\cos x) \neq 0$ (3)
Alors, d'après (1), (2) et (3)
on aura $f : x \mapsto \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$
est continue sur D_f

> Si
> - u est continue sur I
> - v est continue sur J
> - $u(I) \subset J$
>
> 
>
> Alors
> $v \circ u$ est continue sur I

> Si u et v sont deux fonctions continues sur l'intervalle I avec $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$
> Alors la fonction $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est continue sur I.

3- Calculons $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$$

On pose $t = x - \frac{\pi}{2}$
Donc $x = t + \frac{\pi}{2}$
Si $x \to \frac{\pi}{2}$
Alors $t \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin(\cos x)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\sin(t+\frac{\pi}{2})}{\sin\left(\cos(t+\frac{\pi}{2})\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\sin(-\sin t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t^2}\times t^2}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}\times(-\sin t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t^2}}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}}\times\frac{t^2}{-\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t^2}}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}}\times\frac{t^2}{-\frac{\sin t}{t}\times t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t^2}}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}}\times\frac{1}{-\frac{\sin t}{t}}\times t$$

On a $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et $\lim_{t\to 0} t = 0$

Reste à calculer $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}$

Posons $u = -\sin t$

Si $t \to 0$

Alors $u \to 0$

Donc, on aura $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$

Donc $\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t^2}}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}}\times\frac{1}{-\frac{\sin t}{t}}\times t = \frac{\frac{1}{2}}{1}\times\frac{1}{-1}\times 0 = 0$

D'où $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

n'oubliez pas

$\sin(t+\frac{\pi}{2}) = \cos t$

$\cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t$

$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$



Pour calculer une limite de type $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(u(x))}{v(x)}$

Avec $\lim_{x\to x_0}(u(x)) = \lim_{x\to x_0} v(x) = 0$

On doit suivre les étapes suivantes :

$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(u(x))}{v(x)} =$

$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} \times \frac{(u(x))}{v(x)}$

On a : $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = 1$

il reste a déterminer $\lim_{x\to x_0} \frac{(u(x))}{v(x)}$

EXERCICE 47

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\tan(x)+x-1$$

1- Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)$

2- Montrer que f est continue sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

3- a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

b- En déduire la monotonie de f

c- Déterminer $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$

4- a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b- En déduire que l'équation $\tan x=1-x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

CORRECTION

1 - Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\left(\tan(x)+x-1\right)=+\infty$$

2 - La continuité de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

On a : $x\mapsto \tan x$ est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

En particulier sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Et : $x\mapsto x-1$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ polynôme

Donc : $f: x\mapsto \tan x+x-1$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Comme étant somme de deux fonctions continues

3 - a- Calculons $f'(x)$ pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x) = \left(\tan(x) + x - 1\right)'$

$= \tan^2(x) + 1 + 1$

$= \tan^2(x) + 2$

D'où $f'(x) = \tan^2(x) + 2$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

b~ La monotonie de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

On a : $f'(x) = \tan^2(x) + 2$

Et puisque : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right); \tan^2(x) \geqslant 0$ et $2 > 0$

Alors $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right); f'(x) > 0$

D'où f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

c~ Déterminons $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$

On a f est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Donc $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f(0); \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right[$

$= [-1; +\infty[$

$\tan(0) = 0$

> f est strictement croissante sur I si et seulement si $(\forall (x; y) \in I^2)$;
> $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

4~ a~

On a f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$J = f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right) = [-1; +\infty[$

> Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

b~ Déduisons que l'équation $\tan x = 1 - x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

D'après la question précédente, on déduit que :

$(\forall y \in J)\left(\exists! \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right); f(\alpha) = y$

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
> $(\forall y \in f(I))(\exists! x \in I); f(x) = y$

On prend $y=0$

Donc $(\exists! \alpha \in [0;\frac{\pi}{2}[)$; $f(\alpha)=0$

Autrement dit l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}[$

D'où l'équation $\tan x=1-x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}[$

EXERCICE 48

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-3\sin x$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $2x-3 \leqslant f(x) \leqslant 2x+3$

b) En déduire les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{f(x)} ; x \neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue en $x_0=0$

b) Montrer que pour tout $x \in]\frac{3}{2};+\infty[$; $\dfrac{x}{2x+3} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x}{2x-3}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

CORRECTION

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

On sait que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $2x-3 \leqslant 2x-3\sin x \leqslant 2x+3$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $2x-3 \leqslant f(x) \leqslant 2x+3$

b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$; $2x-3 \leqslant f(x) \leqslant 2x+3$

et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x-3=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I tels que

$(\forall x \in I)$; $u(x) \leqslant v(x)$

- $\lim u(x)=+\infty \Longrightarrow \lim v(x)=+\infty$
- $\lim v(x)=-\infty \Longrightarrow \lim u(x)=-\infty$

Et on a : $\lim_{x\to-\infty} 2x+3=-\infty$

Alors $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2 - a - Montrons que g est continue en $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x+3\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(2+\frac{3\sin x}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+3\frac{\sin x}{x}}$$
$$=\frac{1}{5}$$

> f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Et puisque $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$

Alors g est continue en $x_0=0$

b - Montrons que : $\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $\frac{x}{2x+3}\leqslant g(x)\leqslant\frac{x}{2x-3}$

D'après le résultat de la question 1 - a -

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $2x-3\leqslant f(x)\leqslant 2x+3$

En particulier

$\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $2x-3\leqslant f(x)\leqslant 2x+3$

Soit $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

On a : $\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $2x-3\leqslant f(x)\leqslant 2x+3$

Donc : $\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $\frac{1}{2x+3}\leqslant\frac{1}{f(x)}\leqslant\frac{1}{2x-3}$

Donc : $\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $\frac{x}{2x+3}\leqslant\frac{x}{f(x)}\leqslant\frac{x}{2x-3}$

D'où : $\forall x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$; $\frac{x}{2x+3}\leqslant g(x)\leqslant\frac{x}{2x-3}$

c - Calculons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

> كلمتان خفيفتان على اللسان، ثقيلتان في الميزان:
> سبحان الله وبحمده
> سبحان الله العظيم

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

Donc, d'après le théorème gendarme

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$

EXERCICE 49

Le tableau de variations suivant est le tableau de variations d'une fonction f

On pose $f(x) = \frac{ax^2+1}{x^2+b}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖ +	0 −	‖ −	
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow -1$	$-1 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 1$	

1. En utilisant le tableau de variations de f étudier le signe de $f(x)$
2. En utilisant le tableau de variations de f déterminer a et b.
3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;1[$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

CORRECTION

1. Le signe de $f(x)$

Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$

On a f est minorée par le reél 1 sur $]-\infty;-1[$

Donc $\forall x \in]-\infty;-1[\,;\ f(x) > 1$

Et puisque $1 > 0$

Alors $\forall x \in]-\infty;-1[\,;\ f(x) > 0$

x	$-\infty$	-1
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖

$f(x) \geq 0$

-1 est une valeur maximale de f car $f(0)=-1$

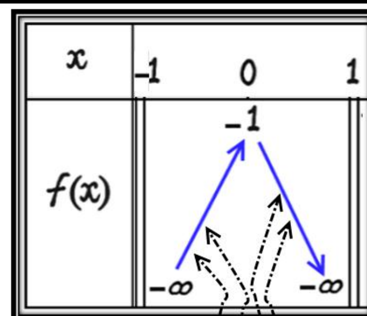
Sur l'intervalle $]-1;1[$

On a -1 est une valeur maximale de f sur $]-1;1[$

Donc $\forall x\in]-1;1[\ ;\ f(x)\leqslant -1$

Et puisque $-1<0$

Alors $\forall x\in]-1;1[\ ;\ f(x)<0$



$f(x)\leqslant 0$

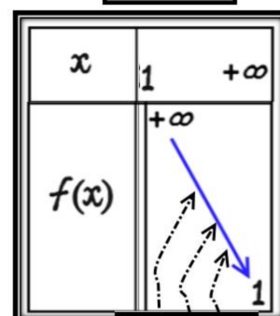
Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a f est minorée par 1 sur $]1;+\infty[$

Donc $\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)>1$

Et puisque $1>0$

Alors $\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)>0$



$f(x)\geqslant 0$

Conclusion

$$\begin{cases}\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\ ;\ f(x)>0\\ \forall x\in]-1;1[\ ;\ f(x)<0\end{cases}$$

2) Déterminons a et b

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+1}{x^2+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2}{x^2}=a$

Et d'après le tableau de variations de f

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Donc $\boxed{a=1}$

On a $f(0)=\dfrac{0^2+1}{0^2+b}=\dfrac{1}{b}$

Et d'après le tableau de variations de f

On a $f(0)=-1$

Donc $\dfrac{1}{b}=-1$

Donc $\boxed{b=-1}$

D'où $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$, pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

3) a) On a g est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que $J = g([0;1[)$

$$= \left] \lim_{x\to 1^-} g(x) ; g(0) \right]$$

$$=]-\infty;-1]$$

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I Alors, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b) Déterminons $g^{-1}(x)$

Soit $x \in J$, on cherche $y \in I$ tel que $g(y) = x$

Pour déterminer $g^{-1}(x)$ On prend $x \in J$ et on cherche l'unique $y \in I$ tel que $g(y) = x$

$$g(y) = x \iff \frac{y^2+1}{y^2-1} = x$$

$$\iff y^2+1 = x(y^2-1)$$

$$\iff y^2+1 = xy^2 - x$$

$$\iff y^2 - xy^2 = -x-1$$

$$\iff y^2(1-x) = -x-1$$

$$\iff y^2 = \frac{-x-1}{1-x}$$

$$\iff y^2 = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\iff y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Or $y \in [0;1[$

Donc : $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

D'où $(\forall x \in J) ; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ
وَقُل رَّبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا

EXERCICE 50

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-2x\ ;\ x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{3(x-1)}\ ;\ x\in]0;1[\\ f(x)=\dfrac{2x+\cos\pi x}{2+\cos\pi x}\ ;\ x\geq 1 \end{cases}$$

1 - a - Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b - Montrer que pour tout $x\geq 1$; on a : $f(x)\geq \dfrac{2x-1}{3}$

c - En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 - Étudier la continuité de f en 0 et en 1

CORRECTION

1 - a - Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Il suffit de remplacer.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)=+\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty \end{cases}$$

b - Montrons que : $\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)\geq \dfrac{2x-1}{3}$

Soit $x\in]1;+\infty[$

On sait que : $-1\leq\cos\pi x\leq 1$

$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ -1\leq\cos x\leq 1$

$$\begin{aligned} -1\leq\cos\pi x\leq 1 &\iff 2-1\leq 2+\cos\pi x\leq 2+1 \text{ et } 2x-1\leq 2x+\cos\pi x\leq 2x+1 \\ &\iff 1\leq 2+\cos\pi x\leq 3 \text{ et } 2x-1\leq 2x+\cos\pi x\leq 2x+1 \\ &\iff \frac{1}{2+\cos\pi x}\geq\frac{1}{3} \text{ et } 2x+\cos\pi x\geq 2x-1 \\ &\iff \frac{2x+\cos\pi x}{2+\cos\pi x}\geq\frac{2x-1}{3} \\ &\iff f(x)\geq\frac{2x-1}{3} \end{aligned}$$

D'où : $\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)\geq \dfrac{2x-1}{3}$

c - Déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D'après la question précédente : $\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)\geq \dfrac{2x-1}{3}$

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I tels que $(\forall x\in I)\ ;\ u(x)\leq v(x)$

- $\lim u(x)=+\infty \Longrightarrow \lim v(x)=+\infty$
- $\lim v(x)=-\infty \Longrightarrow \lim u(x)=-\infty$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{3} = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2 ~ La continuité de f en $x_0 = 0$

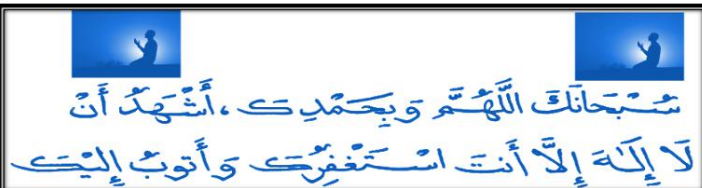
> Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$
>
> Alors f est continue en x_0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\sqrt{x^2+x+1} - 2x\right)$

$= 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+x-2}{3(x-1)}$

$= \frac{2}{3}$



$f(0) = \sqrt{0^2+0+1} - 2\times 0 = 1$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

Alors f est continue en 0 à gauche

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$

Alors f n'est pas en 0 à droite

Conclusion

f n'est pas continue en 0.



La continuité de f en 1

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{3(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x+2)}{3}$

$= 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x+\cos\pi x}{2+\cos\pi x}$

$= 1$

$f(1) = 1$

Et puisque $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Alors f est continue en 1

EXERCICE 51

Soient f et g deux fonctions définies par leurs courbes ci-dessous, représentées dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty;-1]$

et la fonction g définie sur l'intervalle $]2;4]$

1. Donner graphiquement $f(-1)$; $f(-2)$; $g(3)$ et $g(4)$

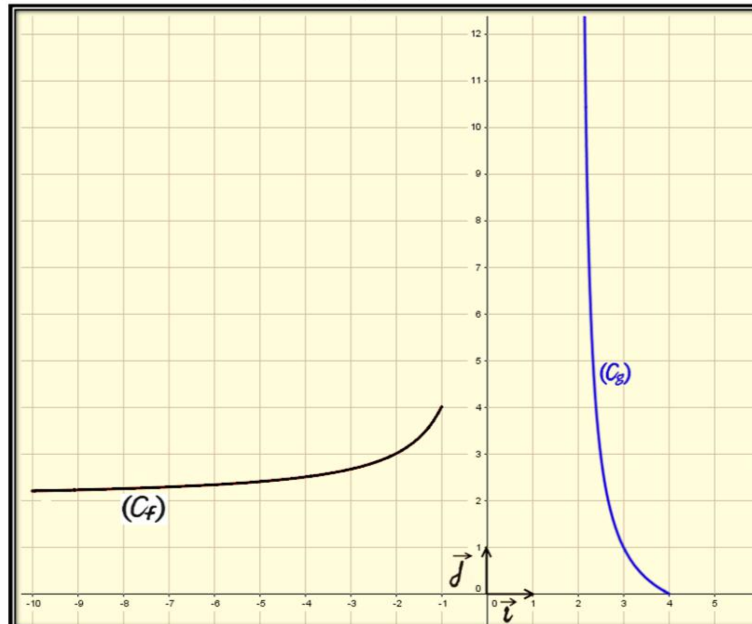
2. Déterminer $g\circ f([-2;-1])$ et $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x)$

3. a. Montrer que : $(\forall x\in]-\infty;-1])$; $f(x)\in]2;4]$

   b. Montrer que pour tous réels a et b tels que $a<b\leq -1$ on a : $g\circ f(a) > g\circ f(b)$

   c. En déduire la monotonie de $g\circ f$ sur $]-\infty;-1]$

4. Montrer que l'équation $g\circ f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2;-1[$



CORRECTION

1 - Graphiquement, on a : $f(-1)=4$, $f(-2)=3$, $g(3)=1$, $g(4)=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ et $\lim_{x\to 2^+} g(x)=+\infty$

2 - Déterminons : $g\circ f([-2;-1])$ et $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x)$

☞ $g\circ f([-2;-1]) = g(f([-2;-1]))$

$= g([f(-2);f(-1)])$

$= g([3;4])$

$= [g(4);g(3)]$

$= [0;1]$

f est continue et strictement croissante sur $[-2;-1]$

g est continue et strictement décroissante sur $[3;4]$

☞ $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(f(x))$

On pose $t=f(x)$

si $x\to-\infty$

Alors $t\to 2^+$

Car $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ et $f(2)>0$

Donc $\lim_{x\to-\infty} g\circ f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(f(x))$

$= \lim_{t\to 2^+} g(t)$

$= +\infty$

3 - a - Montrons que : $(\forall x\in]-\infty;-1])$; $f(x)\in]2;4]$

$f(]-\infty;-1]) =]\lim_{x\to-\infty} f(x);f(-1)]$

$=]2;4]$

Et par suite

$(\forall x\in]-\infty;-1])$; $f(x)\in]2;4]$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

b - Montrons que pour tout réels a et b tel que $a<b\leq-1$

on a : $g\circ f(a) > g\circ f(b)$

Soient a et b deux réels tel que $a<b\leq-1$

$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

$\Rightarrow g(f(a)) > g(f(b))$

f est croissante

g est décroissante

$\Rightarrow g\circ f(a) > g\circ f(b)$

c- **La monotonie de $g\circ f$ sur $]-\infty;-1]$**

D'après le résultat de la question précédente, on a pour tout réels a et b tel que $a<b\leqslant -1$

$a<b \Rightarrow g\circ f(a) > g\circ f(b)$

Donc $g\circ f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4- **Montrons que l'équation $g\circ f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2;-1[$**

Si
- u est continue sur I
- v est continue sur J
- $u(I)\subset J$

Alors $v\circ u$ est continue sur I

- La continuité de $g\circ f$ sur $[-2;-1]$
  - On a f est continue sur $[-2;-1]$
  - $f([-2;-1])=[3;4]$
  - g est continue sur $[3;4]$

Donc $g\circ f$ est continue sur $[-2;-1]$

- Calculons $g\circ f(-2)$ et $g\circ f(-1)$
  - $g\circ f(-2)=g(f(-2))=g(3)=1$
  - $g\circ f(-1)=g(f(-1))=g(4)=0$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors :
$(\forall y\in f(I))(\exists! x\in I);\ f(x)=y$

Conclusion

On a
- $g\circ f$ est continue sur $[-2;-1]$
- $g\circ f(-1)<\frac{1}{2}<g\circ f(-2)$
- $g\circ f$ est strictement décroissante sur $[-2;-1]$

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g\circ f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2;-1[$

Exercices non résolus

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}, & x\neq 3 \\ f(3)=2 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $x_0=3$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x-1}-3}{x-2}, & x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Étudier la continuité de f en $x_0=2$
3. Étudier la continuité de f sur D_f.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}, & x\neq 1 \\ f(1)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Étudier la continuité de f en $x_0=2$
3. Étudier la continuité de f sur D_f.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{2-x}}, & x\neq 2 \\ f(2)=0 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Étudier la continuité de f en $x_0=2$ à gauche

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

1. Déterminer les deux limites : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
2. a. Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$
   c. Dresser le tableau de variations de f
3. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions α, β et γ tels que : $\alpha < -3$; $-3 < \beta < -1$ et $\gamma > -1$
   b. Étudier le signe de $f(x)$
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution λ sur $\mathbb{R}$
   b. Comparer $f(x)$ et 4, suivant les valeurs de x

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$
2. a. Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f
3. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$
4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

EXERCICE 7

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

1. Dresser le tableau de variations de P
2. En déduire le nombre de racines de P
3. Retrouver directement ces racines en factorisant $P(x)$

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{x-1}, & x>1 \\ f(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}, & x<1 \\ f(1)=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f á droite et à gauche du point $x_0=1$
2. f est-elle continue en $x_0=1$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 9

Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A=\frac{\sqrt[5]{512}\,\sqrt[4]{160000}}{\sqrt[4]{64}\,\sqrt[3]{\sqrt{256}\,\sqrt{18}}} \; ; \; B=\frac{\sqrt[3]{9}\,\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

EXERCICE 10

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt[3]{x+8}}{\sin x}\; ; \; \lim_{x\to1}\frac{3-\sqrt[3]{5x^2+10x+12}}{x^2-5x+4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}-2}{x}$$

EXERCICE 11

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{3x^3-2x-1}-\sqrt{x-1}\; ; \; \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt[3]{x^2-2x}$$

EXERCICE 12

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2-1}-2x$; $\lim_{x\to-\infty} 2x-\sqrt[3]{1-x^3}$

$\lim_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}$

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{2x^3}{x^3-1}$

1 - a - Vérifier que : $(\forall x\in]1;+\infty[)$; $f(x)=2+\dfrac{2}{x^3-1}$

b - Montrer que f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

2 - a - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b - Dresser le tableau de variations de f^{-1}

c - Déterminer $f^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$.

EXERCICE 14

1 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations :

a - $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=12$

b - $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$

2 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}>1$

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^5+x^3+x-1$

Montrer que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α compris entre 0 et 1

EXERCICE 16

Montrer que l'équation $x=1-\sin x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;\frac{\pi}{6}[$

EXERCICE 17

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution sur l'intervalle I

1. $x^4+2x^3-5x+1=0$ et $I=]0;1[$
2. $2\cos x=x$ et $I=]0;\frac{\pi}{2}[$
3. $\sin x=\cos x$ et $I=]0;\frac{\pi}{2}[$
4. $x^3-\sqrt{x}-3x+1=0$ et $I=]0;1[$

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}, & x\neq 3 \\ f(3)=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

Montrer que f est continue en $x_0=3$

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x-2} & ; x\geq 3 \\ f(x)=x-1+\sqrt[3]{3-x} & ; x<3 \end{cases}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]3;+\infty[$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Déterminer $g^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$.

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}, & x\neq 3 \\ f(3)=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

Montrer que f est continue en $x_0=3$

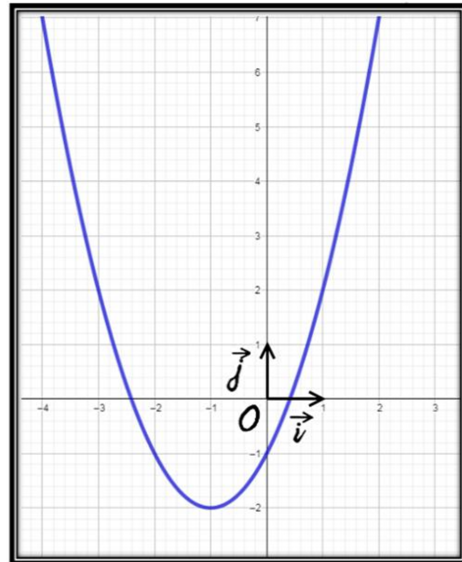
EXERCICE 21

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Montrer que f est continue sur D_f
3. Calculer les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
4. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution α sur l'intervalle $]1;2[$
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;-1[$
   a- Montrer que pour tous x et y de I : $x<y \Rightarrow g(x)>g(y)$
   b- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   c- Déterminer $g^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$

EXERCICE 22

La courbe donnée ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;2]$



1. a- Donner le tableau de variations de f
   b- La fonction f est-elle continue sur $[-4;2]$
2. a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-1;2[$
   b- Donner un encadrement de α d'amplitude 1
   c- Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-1;2]$
3. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[-1;2]$ et que $]\alpha;1[$

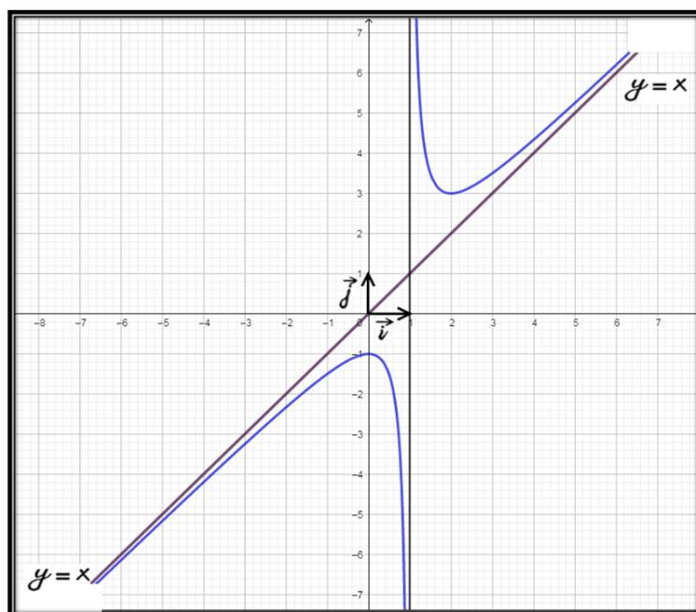
EXERCICE 23

Soit f la fonction définie sur $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$

1. Déterminer les deux reéls a et b tels que :
$(\forall x \in D)\,;\, f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D
3. En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer :
   a- Le sens de variations de la fonction f
   b- Le signe de $f(x)$
   c- Les solutions de l'inéquation : $f(x) \geq 3$

EXERCICE 24

La courbe donneé ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$



1. Calculer les limites suivantes :
   a- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   c- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; d- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$
3. Résoudre l'équation $f(x)=0$
4. Étudier le signe de $f(x)$, suivant les valeurs de x
5. Donner, graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ (discuter suivant les valeurs de m)